المحاضرة 2

التحليل التوفيقي

- المبدأ الأساسي للعد (التحليل التوفيقي)؛
- القائمة؛
- الترتيبة؛
- التبديلة؛
- التوفيقة؛
- أنواع السحب.

لماذا نستعمل التحليل التوفيقي؟

نستعمل التحليل التوفيقي أو العد من أجل معرفة عدد **الإمكانيات الكلية لأي تجربة عشوائية** ($n_{(s)}$)، هذه الأخيرة تسمح لنا بحساب احتمال أي حدث عشوائي.

مثال

1. المبدأ الأساسي للعد

لتكن لدينا مجموعة من الاجراءات:

الاجراء 1 يتم ب n1 طريقة؛

الاجراء 2 يتم ب n2 طريقة؛

الاجراء من الرتبة K يتم ب nk طريقة .

يتم تحقيق هذه الاجراءات معا بـــــ

$$n_1 \times n_2 \times \ldots\ldots\ldots n_k$$

مثال 1: كم عدد مكون من ثلاث أرقام يمكن تشكيله من المجموعة التالية: $E=\{1,4,6,7,5\}$ في حالة التكرار، وفي حالة عدم التكرار.

الحل: لدينا المجموعة E مكونة من 5 أرقام .

حالة التكرار

آحاد	عشرات	آلاف
5	5	5

إذن هذا الاجراء يتم بـ $5\times5\times5=5^3=125$ طريقة

وبالتالي يمكن تشكيل 125 عدد.

حالة عدم التكرار

آحاد	عشرات	آلاف
5	4	3

إذن هذا الاجراء يتم بـ $5\times4\times3=60$ طريقة

وبالتالي يمكن تشكيل 60 عدد

من أجل فهم التحليل التوفيقي لابد من فهم خصائص التجربة العشوائية، هذه الأخيرة تتميز بثلاثة خصائص أساسية:

- ✓ عناصر التجربة أو المجموعة وهنا لابد من التمييز بين:
  - عدد عناصر المجموعة E التي نختار منها (n).
  - عدد العناصر المسحوبة أو المشكلة (P).
- ✓ أهمية الترتيب وهنا نميز بين حالتين:
  - الترتيب مهم؛ أي ($AB \neq BA$).
  - الترتيب غير مهم؛ أي ($AB = BA$).
- ✓ نوعية السحب، وهنا نميز بين حالتين:
  - السحب مع الارجاع؛ أي مع التكرار.
  - السحب بدون إرجاع؛ أي بدون تكرار.

2. القائمة

القائمة: نسمي قائمة ذات **P** عنصر مأخوذة من المجموعة ذات **n** عنصر؛ كل تشكيلة مرتبة وبتكرار ذات **p عنصر**.

عدد القوائم ذات p عنصر مأخوذة من المجموعة E ذات n عنصر هو:

n^p ؛ أي $card(\Omega) = n^p$

مثال 1: كم رقم سري مكون من 4 أرقام يمكن تشكيله لفتح هاتف نقالك.

$n = 10 \;/\; p = 4$	الترتيب مهم (أرقام)	التكرار ممكن

إذن الترتيب مهم والتكرار موجود وبالتالي نحن أمام قائمة: $card(\Omega) = n^P = 10^4 = 10000$

أي يمكن تشكيل 10000 رقم سري.

مثال 2: لوحة تحكم بها 9 أزرار تسمح لنا بتشكيل رقم سري للولوج لقاعدة بيانات حكومية. كم رقم سري يتكون من حرفين وثلاثة أرقام يمكن تشكيله.

1	2	3
4	5	6
X	Z	Y

الحل: هناك إجراء خاص بالأرقام وإجراء خاص بالحروف.

الأرقام

$n = 6 \;/\; p = 3$	الترتيب مهم	التكرار موجود

$card(\Omega) = n^P = 6^3 = 216$

الحروف

$n = 3 \;/\; p = 2$	الترتيب مهم	التكرار موجود

$card(\Omega) = n^P = 3^2 = 9$

إذن حسب المبدأ الأساسي للعد فإنه يمكن تشكيل ($216 \times 9 = 1944$) رقم سري.

3. الترتيبات

نسمي ترتيبة ذات **p** عنصر مأخوذة من **n** عنصر كل تشكيلة **مرتبة وبدون تكرار** ذات **p** عنصر.

يرمز لها بالرمز A_n^p ، حيث عدد الترتيبات تحسب كما يلي:

$$card(\Omega) = A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

من أجل القيام بالحسابات الخاصة بالترتيبات نستعمل قواعد الحساب التالية:

$$n! = n.(n-1).(n-2).......3.2.1$$

$$n! = n.(n-1)!$$

$$1! = 1$$

$$0! = 1$$

مثال 1 : كم كلمة يمكن تشكيلها مكون من حرفين مختلفين من المجموعة E: $E = \{A, B, C\}$

$n = 3$

$p = 2$

$$\{AB, AC, BA, BC, CA, CB\} \rightarrow N = 6$$

إذن هناك 6 كلمات مشكلة من حرفين مختلفين ومرتبة.

مثال 2: كم رقم سري مكون من 4 أرقام مختلفة يمكن تشكيله لفتح هاتف نقالك.

n =10 / p=4	الترتيب مهم (أرقام)	التكرار غير مسموح

إذن الترتيب مهم وبدون تكرار موجود وبالتالي نحن أمام ترتيبة:

$$card(\Omega) = A_{10}^{4} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = 5040$$

ومنه يمكن تشكيل 5040 رقم سري.

4. التبديلة

نسمي تبديلة ذات n عنصر كل تشكيلة **مرتبة بدون تكرار** لــــــn عنصر؛ أي هي طريقة لترتيب جنبا لجنب n عنصر

يرمز للتبديلة بـــــ P_n حيث:

$$P_n = n! = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 3.2.1$$

وهي تمثل عدد التباديل الممكن الحصول عليها من n عنصر.

طبعا نلاحظ أن التبديلة هي حالة خاصة من التراتيب، حيث نقوم بترتيب وبدون تكرار جميع العناصر n.على هذا الأساس فتبديلة المجموعة E ذات n عنصر هي كل ترتيبة ذات n عنصر.

$$Si \rightarrow n = p \rightarrow Alors$$

$$card(\Omega) = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

مثال 1: ما هو عدد تباديل المجموعة: $E=\{A,B,C\}$

التبديلات هي كل المجموعات الجزئية المرتبة الممكن تشكيلها بعناصر المجموعة E؛ أي هي:

$$\{ABC, ACB, BAC, BCA, CBA, CAB\} \rightarrow N=6$$

بوجه عام يمكن ترتيب n من العناصر بطرق عددها: $n(n-1)(n-2)\ldots\ldots.3.2.1$

مثال 2: بكم طريقة يمكن ترتيب حروف كلمة "تقوى".

الحل: هناك 4 حروف مختلفة عن بعضها البعض، وحسب تعريف التباديل يمكن الحصول على 24 كلمة:

$$P_4 = 4! = 4\times3\times2\times1 = 24$$

التباديل بتكرار

غالبا ما نريد معرفة عدد التشكيلات لعدد من العناصر بعضها متشابه

$$n = n_1 + n_2 + \dots\dots + n_k$$

هنا لا يمكن تطبيق التبديلة العادية بل يتم تطبيق التبديلة التالية:

$$Si \rightarrow n = n_1 + n_2 + \dots\dots + n_k \rightarrow Donc$$

$$card(\Omega) = P_n = \frac{n!}{n_1!.n_2!.....n_k!}$$

مثال 3: كم كلمة ليست بالضرورة لها معنى يمكن تشكيلها بحيث تحتوي على جميع أحرف كلمة "Economie"

التكرار غير ممكن	الترتيب مهم	n =8 /p=8=n

طبعا هذه خصائص التبديلة، لكن عند ملاحظة عناصر كلمة (Economie) نجد أنها تحتوي على بعض العناصر المتشابهة. وبالتالي لا يمكن تطبيق التبديلة العادية.

$$n = 8 = 1_c + 1_n + 1_m + 1_i + 2_o + 2_e$$

$$card(\Omega) = P_8 = \frac{8!}{1!.1!.1!.1!.2!.2!} = \frac{8!}{4} = 10080$$

إذن هناك 10080 كلمة يمكن تشكيلها باستعمال أحرف كلمة (Economie)، طبعا قد لا يكون للكلمة أي معنى.

5) التوفيقات

أ) توفيقة بدون تكرار

نسمي توفيقة ذات p عنصر ماخوذة من n عنصر كل تشكيلة غير مرتبة وبدون تكراردات p عنصر

$$Card(\Omega) = C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!}$$

خواص:

$$C_n^1 = n$$

$$C_n^0 = C_n^n = 1$$

ب) توفيقة بتكرار

نسمي توفيقة ذات p عنصر ماخوذة من n عنصر كل تشكيلة غير مرتبة وبتكرار.

$$Card(\Omega) = C_{n+p-1}^{p}$$

مثال 2: نريد تشكيل فريق لكرة القدم في الصالة مكون من 6 أشخاص للعب البطولة الوطنية بين الجامعات، عملية الاختيار تكون من بين 4 أستاذة و8 طلبة. أوجد كم فريق يمكن تشكيله بحيث:

- ✓ الفريق كله مكون من الطلبة.
- ✓ 50% طلبة.

الحل: طبعا عملية الاختيار بدون تكرار والترتيب غير مهم فهي توفيقة.

50% طلبة		الفريق كله مكون من الطلبة	
n =4 /p=3	n=8 /p=3	n =4 /p=0	n=8 /p=6
$Card(\Omega)=C_8^3\times C_4^3=\frac{8!}{3!(8-3)!}\times\frac{4!}{3!(4-3)!}=56\times 4=224$		$Card(\Omega)=C_8^6\times C_4^0=\frac{8!}{6!(8-6)!}\times 1=28$	
هناك 224 فريق		هناك 28 فريق	

انواع السحب

السحب بالارجاع

- نسحب كرة ثم نرجعها

عدد الطرق هي:

$$card\left(\Omega\right) = n^P$$

السحب بدون ارجاع

- مراعاة الترتيب فهي تربية

دون مراعاة الترتيب فهي توفيقة

ملاحظات هامة: هناك بعض العبارات تستعمل عند عملية السحب تساعد في تحديد عدد طرق السحب:

- ✓ عبارة في آن واحد تلغي أهمية الترتيب وبالتالي نكون أمم توفيقة.
- ✓ عدم تحديد وظيفة الأشخاص المسحوبين يلغي أهمية الترتيب وبالتالي نستعمل التوفيقة.
- ✓ عبارة على التوالي تجعل من الترتيب مهم وبالتالي نكون أمام ترتيبة.
- ✓ تحديد وظيفة الأشخاص الذين تم سحبهم يجعل من الترتيب مهم وبالتالي نستعمل الترتيبة.