Corrigé type d'examen de Rattrapage 2022

Exercice 1 :

1. L'équation caractéristique de (2) est
$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$
La racines sont : $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ Donc la solution est
$$L_n = c_1\alpha^n + c_2\beta^n$$
De $L_0 = 2, L_1 = 1$, on obtient que $c_1 = c_2 = 1$. Alors
$$L_n = \alpha^n + \beta^n, \quad n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

2. On a
$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{L_{n+r}}{L_n} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{\alpha^{n+r}+\beta^{n+r}}{\alpha^n+\beta^n}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{\alpha^{n+r}\left(1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+r}\right)}{\alpha^n\left(1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n}\right)}\\ &= \alpha^r.\end{aligned}$$

3. **a)** ***Méthode 1 :***
$$\begin{aligned}L_n^2 - L_{n-1}L_{n+1} &= (\alpha^n+\beta^n)^2 - (\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})\\ &= (\alpha^{2n}+\beta^{2n}+2(\alpha\beta)^n - \alpha^{2n} - \alpha^{n-1}\beta^{n+1} - \beta^{n-1}\alpha^{n+1} - \beta^{2n}\\ &= -(\alpha\beta)^{n-1}(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta)\\ &= (-1)^n(\alpha-\beta)^2\\ &= 5(-1)^n.\end{aligned}$$

Méthode 2 :
Par reccurence :
- Pour $n = 1$ on a
$$L_1^2 - L_0L_2 = -5 = 5(-1)^1$$
donc la propsition est vrais pour $n = 1$.
- Supposons que la proposition est vrais pour n, c'es-à-dir
$$L_n^2 - L_{n-1}L_{n+1} = 5(-1)^n$$
et montrons la proposition pour $n+1$. On a
$$\begin{aligned}L_{n+1}^2 - L_nL_{n+2} &= L_{n+1}(L_n + L_{n-1}) - L_n(L_{n+1}+L_n)\\ &= -(L_n^2 - L_{n+1}L_{n-1})\\ &= -5(-1)^n = 5(-1)^{n+1}.\end{aligned}$$
- Donc
$$L_n^2 - L_{n-1}L_{n+1} = 5(-1)^n, \quad \forall n \geq 1.$$

b On a

$$\begin{aligned}
L_{n+k} - (-1)^k L_{n-k} &= \alpha^{n+k} + \beta^{n+k} - (-1)^k(\alpha^{n-k} + \beta^{n-k}) \\
&= \alpha^{n+k} + \beta^{n+k} - \alpha^n(-\alpha)^{-k} + \beta^n(-\beta)^{-k} \\
&= \alpha^{n+k} + \beta^{n+k} - \alpha^n\beta^k - \beta^n\alpha^k \\
&= \alpha^n(\alpha^k - \beta^k) - \beta^n(\alpha^k - \beta^k) \\
&= (\alpha^n - \beta^n)(\alpha^k - \beta^k) \\
&= (\alpha-\beta)^2\left(\frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha-\beta}\right) \\
&= 5F_nF_k,
\end{aligned}$$

Exercice 2 :

1. ***Déterminons les points d'équilibres de l'équation (3) :***
   Soit $\overline{x} \in]0, +\infty[$ un point d'équilibre de l'équation (3), donc

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{\overline{x}}{\alpha\overline{x} + \overline{x}} \\
\overline{x}((1+\alpha)\overline{x} - 1) &= 0
\end{aligned}$$

   $\overline{x} = 0$ (refuser car n'est pas un solution) ou $\overline{x} = \dfrac{1}{1+\alpha}$.

2. *Déterminer l'équation aux différences linéaire associée de (3) atour de $\overline{x}$.*
   L'équation linéaire associée est

$$y_{n+1} = p_0 y_n + p_1 y_{n-1}$$

   Soit la fonction

$$\begin{aligned}
f:\ ]0,+\infty[^2 &\longrightarrow]0,+\infty[\\
(x,y) &\longmapsto \frac{y}{\alpha x + y}.
\end{aligned}$$

   On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-\alpha y}{(\alpha x + y)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\alpha x}{(\alpha x + y)^2}.$$

   D'où

$$p_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x},\overline{x}) = -\frac{\alpha}{1+\alpha}, \quad p_1 = \frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x},\overline{x}) = \frac{\alpha}{1+\alpha}.$$

   Donc

$$y_{n+1} = -\frac{\alpha}{1+\alpha}y_n + \frac{\alpha}{1+\alpha}y_{n-1}$$

3. ***Donnons une condition suffisante de stabilité localement asymptotiquement de $\overline{x}$:***
   On a

$$|p_0| + |p_1| = \left|-\frac{\alpha}{1+\alpha}\right| + \left|\frac{\alpha}{1+\alpha}\right| = \frac{2\alpha}{1+\alpha}.$$

   Alors, d'aprés le théorème de Clark $\overline{x}$ est asymptotiquement stable si $\dfrac{2\alpha}{1+\alpha} < 1$ qui donne $\alpha < 1$.

4. ***Montrons que* $[0,1]$ *est un intervalle invariant pour (3)***
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a
$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{\alpha x_n + x_{n-1}} \geq 0$$
   et
$$x_{n+1} - 1 = \frac{-\alpha x_n}{\alpha x_n + x_{n-1}} \leq 0$$
   donc
$$0 \leq x_n \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$
   On a f est croissante par rapport à x et décroissante par rapport à y.
5. ***Donnons une condition suffisante pour $\overline{x}$ soit globalement attractif :***
   Soit la fonction
$$\begin{aligned} f: \ [\varepsilon,1]^2 &\longrightarrow [\varepsilon,1] \\ (x,y) &\longmapsto \frac{y}{\alpha x + y}. \end{aligned}$$
   On a f est décroissante par rapport à x et croissante par rapport à y.
   Soit $m, M \in [0,1]$ tels que
$$\begin{cases} m = f(M,m) \\ M = f(m,M) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{m}{\alpha M + m} \\ M = \dfrac{M}{\alpha m + M} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mM = \dfrac{mM}{\alpha M + m} \\ Mm = \dfrac{Mm}{\alpha m + M} \end{cases}$$
   Donc
$$\frac{1}{\alpha M + m} = \frac{1}{\alpha m + M}$$
$$(M-m)(1-\alpha) = 0.$$
   Si $\alpha \neq 1$ on obtient $M = m$, alors d'après le deuxième Théorème de convergence $\lim_{n\to+\infty} = \overline{x}$, par conséquent une condition suffisante de la tracttif global est $\alpha \neq 1$.
   Déduirons la stabilité globale :
   On a $\alpha < 1$, donc d'après la question (3) $\overline{x}$ est localement stable et d'après la question présidente globalement attractif, alors $\overline{x}$ est globalement stable.
6. ***Programme Matlab pour tracer la solution de (3) :***

<u>Exercice 3 :</u>

1. ***Montrons que la solution*** $\{x_n, y_n\}_{n\geq -1}$ ***est éventulement périodique :***
   De (**??**) on a

$$\begin{cases} x_{n+2} = \dfrac{a}{x_{n+1}y_{n+1}^2} = \dfrac{x_n y_n x_{n-1} y_{n-1}}{b} \\ x_{n+3} = \dfrac{a}{x_{n+2}y_{n+2}^2} = x_n \end{cases} \qquad \begin{cases} y_{n+2} = \dfrac{b y_{n+1}}{x_n y_n} = \dfrac{a}{x_n x_{n-1} y_{n-1}} \\ y_{n+3} = \dfrac{b y_{n+2}}{x_{n+1} y_{n+1}} = x_n \end{cases}$$

   Donc $\{x_n, y_n\}_{n\geq 0}$ est éventulement périodique de période 3.

2. ***Déduirons la forme de la solution :***
   La forme de la solution de (**??**) est

$$\begin{cases} x_{3n} = x_0 \\ x_{3n+1} = \dfrac{a}{x_0 y_0^2} \\ x_{3n+2} = \dfrac{x_0 y_0 x_{-1} y_{-1}}{b} \end{cases} \qquad \begin{cases} y_{3n} = y_0 \\ y_{3n+1} = \dfrac{b y_0}{x_{-1} y_{-1}} \\ y_{3n+2} = \dfrac{a}{x_0 x_{-1} y_{-1}} \end{cases} \qquad n \geq 0$$