Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf de Mila
Institut des Sciences et de la Technologie
Première Année Master Mathématiques Appliquées et Fondamentales 2022/2023

Matière : *Équations aux différences* Durée : 1h30m
Responsable : *Y. Halim*

Examen de Rattrapage

Exercice 1 : (6 Pts)

Soit $\{L_n\}_{n\geq 0}$ la suite de Lucas définie par

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, \quad L_0 = 2, L_1 = 1.$$

1. Donner la forme des solutions (Formule de Benet) de la suite de Lucas.
   (on note les racines par α et β, avec $\alpha > \beta$).
2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{L_{n+r}}{L_n}$, avec $r \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que

$$L_n^2 - L_{n-1}L_{n+1} = 5(-1)^n, \quad \forall n \geq 1. \tag{1}$$

$$L_{n+k} - (-1)^k L_{n-k} = 5F_nF_k, \quad \forall n, k \in N \tag{2}$$

   avec $\{F_n\}_{n\geq 0}$ est la suite de Fibonacci.

Exercice 2 : (9 Pts)

Considérons l'équation aux différences

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{\alpha x_n + x_{n-1}} \tag{3}$$

et $\alpha \geq 0, x_{-1}, x_0 > 0$.

1. Montrer que (3) admet un seul point d'équilibre $\overline{x}$.
2. Déterminer l'équation aux différences linéaire associée de (3) atour de $\overline{x}$.
3. Donner une condition suffisante de la stabilité locale asymptotique du $\overline{x}$.
4. Montrer que $[0, 1]$ est un intervalle invariant pour (3).
5. Supposons exist $[\varepsilon, 1]$ un intervalle invariant pour (3), $\varepsilon > 0$. Donner une condition pour $\overline{x}$ soit globalement attractif et déduire que si $\alpha < 1$ alors $\overline{x}$ est globalement stable.
6. Tracer une graph approximatif de la solution de (3) dans le cas $\alpha = 0.5, x_{-1} = 1, x_0 = 2$.

Exercice 3 : (5 Pts)

Résoudre le système d'équation aux différences suivant

$$x_{n+1} = \frac{9}{x_n y_n^2}, \quad y_{n+1} = \frac{3y_n}{x_{n-1}y_{n-1}}, \quad n \geq 0 \tag{4}$$

avec $x_{-1}, y_{-1}, x_0, y_0 > 0$.