Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf de Mila
Institut des Sciences et de la Technologie
Première Année Master Mathématiques Appliquées et Fondamentales 2022/2023

Matière : *Équations aux différences* Durée : 1h30
Responsable : *Y. Halim*

Examen Final

Exercice 1 : (6 Pts)

Soit $\{J_n\}_{n\geq 0}$ la suite de Jacobsthal définie par

$$J_{n+2} = J_{n+1} + 2J_n, \quad J_0 = 0, J_1 = 1.$$

1. Donner la forme de la solution (Formule de Benet) de la suite de Jacobsthal.
2. Montrer que

$$J_{n-1}J_{n+1} - J_n^2 = -(-2)^n, \quad \forall n \geq 2. \quad \texttt{(L'identité de Cassini)} \tag{1}$$

$$J_{n+r}J_{n+1} - J_{n+r+1}J_n = (-2)^n J_r, \quad \forall n, r \geq 1. \quad \texttt{(L'identité d'Ocagne)} \tag{2}$$

Exercice 2 : (8 Pts)

Soit l'équation aux différences

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_{n-1}}{1 + x_n x_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{3}$$

avec $\alpha > 0, \alpha \neq 1, x_0, x_{-1} \in [0, +\infty[$

1. Détrminer les points d'équilibres de l'équation (3).
2. Etudier la stabilité locale des points d'équilibres de l'équation (3).
3. Montrer que si $\alpha < 1$, alors $\overline{x} = 0$ est globalement asymptotiquement stable.
4. Tracer le graphique approximative de l'équation (3) dans le cas $\alpha < 1$.

Exercice 3 : (6 Pts)

Soit le système d'équations aux différences

$$x_{n+1} = \frac{3}{x_n y_n^2}, \quad y_{n+1} = \frac{2y_n}{x_{n-1}y_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{4}$$

où x_{-1}, y_{-1}, x_0, y_0 sont des nombres réels strictement positifs.

1. Montrer que la solution du système (4) est unique.
2. Montrer que pour toute solution $(x_n, y_n)_{n\geq -1}$ du système (4)

$$x_{n+3} = \frac{3}{4}x_n, \quad y_{n+3} = \frac{4}{3}y_n, \quad n \geq 1.$$

3. Déduire la forme de la solution du système (4).