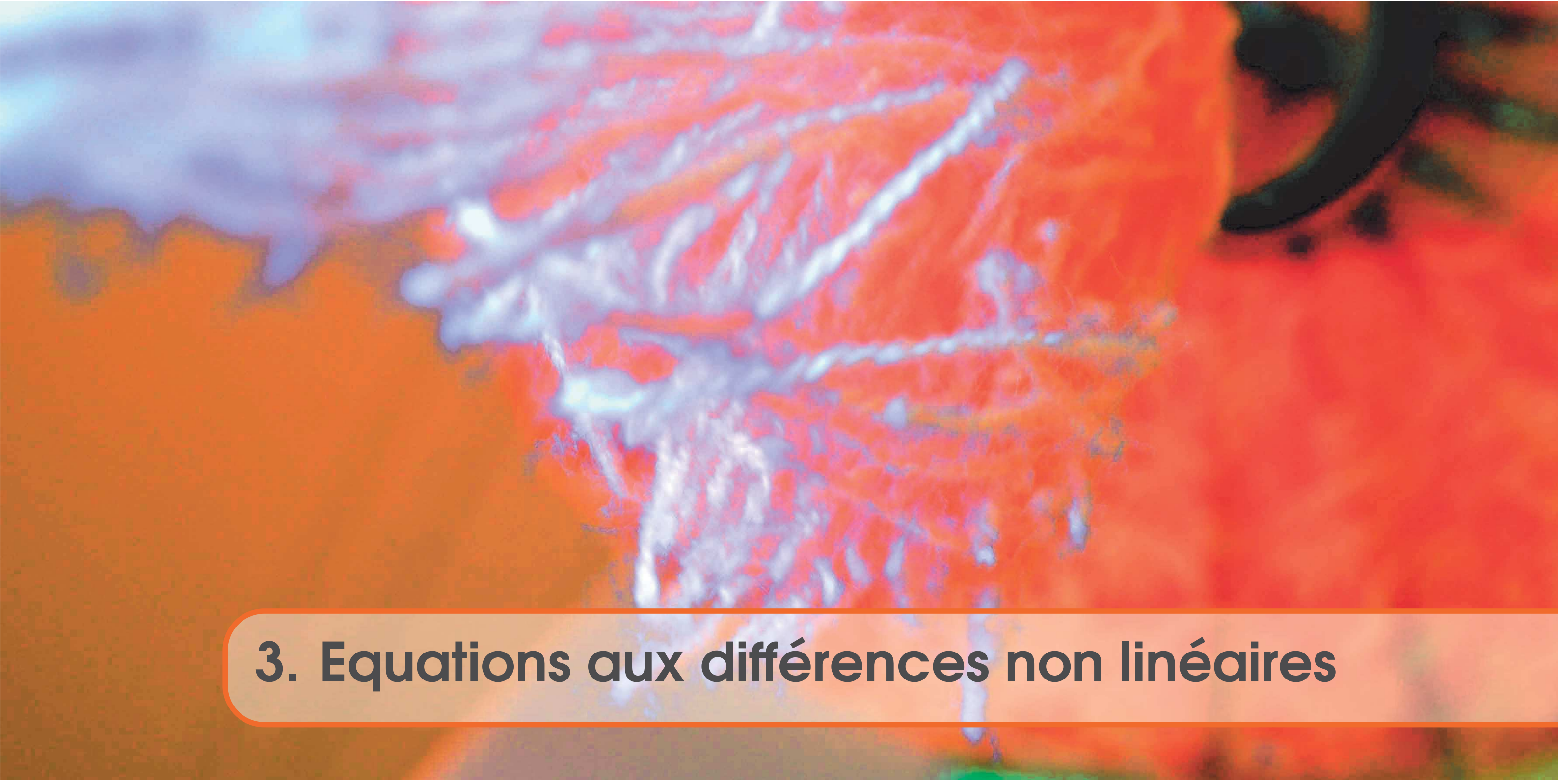

3. Equations aux différences non linéaires

3.1 Définitions de Stabilité

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I^{k+1} \to I$ est une fonction continue.

Définition 3.1.1 Une équation aux différences d'ordre $(k+1)$.

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{n-k}), \quad n = 0, 1, \cdots, \tag{3.1}$$

avec les valeurs initiales. $x_0, x_{-1}, \cdots, x_{-k} \in I$, est dite non linéaire s'il n'est pas de la forme (2.1).

■ **Example 3.1**

1. L'équation
$$x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}}{2 + x_{n-3}}$$
est une équation aux différences non linéaire d'ordre 4 .
2. L'équation
$$x_{n+1} = 2x_{n-1} + x_{n-2}^2$$
est une équation aux différences non linéaire d'ordre 3 .

■

Définition 3.1.2 Un point $\bar{x} \in I$ est dit point d'équilibre pour l'équation (3.1) si

$$\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{x}, \cdots, \bar{x}),$$

autrement dit

$$x_n = \bar{x}, \quad \forall n \geq -k.$$

■ **Example 3.2**

1. Soit $\overline{x} \in I \subset \mathbb{R}$ un point d'équilibre de l'équation aux différences
$$x_{n+1} = \frac{2}{-1+x_{n-2}}$$
alors
$$\overline{x} = \frac{2}{-1+\overline{x}}$$
donc $\overline{x} = 2$ ou $\overline{x} = -1$.
2. Soit $\overline{x} \in I \subset \mathbb{R}$ un point d'équilibre de l'équation aux différences
$$x_{n+1} = \frac{\alpha}{1+x_{n-4}}$$
alors
$$\overline{x} = \frac{\alpha}{1+\overline{x}}$$
donc $\overline{x} = \dfrac{-1+\sqrt{1+4\alpha}}{2}$ ou $\overline{x} = \dfrac{-1-\sqrt{1+4\alpha}}{2}$.

■

Définition 3.1.3 Une solution $\{x(n)\}_{n=-k}^{+\infty}$ de l'équation (3.1) est dite ***éventuelleement périodique*** de période $p \in \mathbb{N}_0$ si
$$\exists N \geq -k; \quad x_{n+p} = x_n.$$
Si $N = -k$, on dit que la solution est ***périodique*** de période p .

■ **Example 3.3**

1. Soit l'équation aux différences
$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n}, \quad n \geq 0.$$
On a
$$\begin{aligned} x_{n+2} &= \frac{1}{x_{n+1}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{x_n}} = x_n. \end{aligned}$$
Donc $\{x(n)\}_{n=0}^{+\infty}$ est périodique de période 2.
2. Soit l'équation aux différences
$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n x_{n-1}}, \quad n \geq 0.$$
On a
$$\begin{aligned} x_{n+3} &= \frac{1}{x_{n+2}x_{n+1}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}x_n}\,\frac{1}{x_n x_{n-1}}} \\ &= x_{n+1}x_n^2 x_{n-1} \\ &= \frac{1}{x_n x_{n-1}} x_n^2 x_{n-1} = x_n. \end{aligned}$$
Donc $\{x(n)\}_{n=0}^{+\infty}$ est périodique de période 3.

■

Définition 3.1.4 Un intervalle $J \subseteq I$ est dit intervalle invariant pour l'équation (3.1) si

$$x_{-k}, x_{-k+1}, \cdots, x_0 \in J \Rightarrow x_n \in J, \quad n > 0.$$

3.1.1 Stabilité des équations aux différences non linéaires

Définition 3.1.5 Soit $\bar{x}$ un point d'équilibre de l'équation (3.1).

1. $\bar{x}$ est dit ***localement stable*** si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_{-k}, \cdots, x_0 \in I : \mid x_{-k} - \bar{x} \mid + \cdots + \mid x_0 - \bar{x} \mid < \delta$$

alors

$$\mid x_n - \bar{x} \mid < \varepsilon, \forall n \geq -k.$$

2. $\bar{x}$ est dit ***localement asymptotiquement stable*** si
•$\bar{x}$ est localement stable,
•$\exists \gamma > 0, \forall x_{-k}, \cdots, x_0 \in I : \mid x_{-k} - \bar{x} \mid + \cdots + \mid x_0 - \bar{x} \mid < \gamma$ alors

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \bar{x}.$$

3. $\bar{x}$ est dit ***globalement attractif*** si

$$\forall x_{-k}, \cdots, x_0 \in I, \lim_{n \to \infty} x_n = \bar{x}.$$

4. $\bar{x}$ est dit ***globalement asymptotiquement stable*** si
•$\bar{x}$ est localement stable,
•$\bar{x}$ est globalement attractif.
5. Le point $\bar{x}$ est dit ***instable*** s'il est non localement stable.

Définition 3.1.6 On appelle ***équation aux différences linéaire associée*** à l'équation (3.1) l'équation

$$y_{n+1} = p_0 y_n + p_1 y_{n-1} + \cdots + p_k y_{n-k} \tag{3.2}$$

avec

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}(\bar{x}, \bar{x}, \cdots, \bar{x}), i = 0, \cdots, k.$$

et

$$\begin{array}{llll} f: & I^k & \longrightarrow I \\ & (u_1, \ldots, u_k) & \longmapsto f(u_1, \ldots, u_k). \end{array}$$

et

$$p(\lambda) = \lambda^{k+1} - p_0 \lambda^k - \cdots - p_k.$$

son polynôme caractéristique associé .

■ **Example 3.4**

1. Soit l'équation aux différences d'ordre 2

$$x_{n+1} = \frac{2}{-1 + x_{n-1}}, \quad n \geq 0 \tag{3.3}$$

On definie la fonction

$$\begin{array}{rcl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto f(x,y) = \dfrac{2}{-1+y} \end{array}$$

Les points d'équilibre de l'équation (3.3) sont $\bar{x}=2$ et $\bar{x}=-1$.
équation aux différences linéaire associée a l'équation (3.3) autor du point d'équilibre $\bar{x}=-1$ est

$$y_{n+1} = p_0 y_n + p_1 y_{n-1}$$

avec

$$p_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{x}) = 0, \quad p_1 = \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{x}) = -\frac{1}{2}$$

donc l'équation aux différences linéaire associée a l'équation (3.3) autor du point d'équilibre $\bar{x}=-1$ est

$$y_{n+1} = -\frac{1}{2} y_{n-1}.$$

2. Soit l'équation aux différences d'ordre 2

$$x_{n+1} = \frac{2x_n}{x_n x_{n-1} - x_{n-2}}, \quad n \geq 0 \tag{3.4}$$

On definie la fonction

$$\begin{array}{rcl} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto f(x,y) = \dfrac{2x}{xy-z} \end{array}$$

Les points d'équilibre de l'équation (3.3) sont $\bar{x}=2$ et $\bar{x}=-1$.
équation aux différences linéaire associée a l'équation (3.4) autor du point d'équilibre $\bar{x}=2$ est

$$y_{n+1} = p_0 y_n + p_1 y_{n-1} + p_2 y_{n-2}$$

avec

$$p_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{x},\bar{x}) = -1, \quad p_1 = \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{x},\bar{x}) = 2, \quad p_2 = \frac{\partial f}{\partial z}(\bar{x},\bar{x},\bar{x}) = 1$$

donc l'équation aux différences linéaire associée a l'équation (3.3) autor du point d'équilibre $\bar{x}=2$ est

$$y_{n+1} = -y_n + 2y_{n-1} + y_{n-2}.$$

■

3.1.2 Stabilité par linéarisation

Théorème 3.1.1

1. Si toutes les racines du polynôme caractéristique de l'équation aux différences linéaire associée sont dans le disque unité ouvert $|\lambda| < 1$, alors le point d'équilibre $\bar{x}$ de l'équation (3.1) est asymptotiquement stable.
2. Si au moins une racine du polynôme caractéristique de l'équation aux différences linéaire associée a un module supérieur à un, alors le point d'équilibre $\bar{x}$ de l'équation (3.1) est instable.

Proof. Soit l'équation aux différences (3.1)

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{n-k}), \quad n = 0, 1, \cdots,$$

et la fonction

$$f: \quad I^k \longrightarrow I$$
$$(u_1, \dots, u_k) \longmapsto f(u_1, \dots, u_k).$$

Si en faire un devlopement de taylor de la fonction f autor du point d'quilbre $(\bar{x}, \bar{x}, \cdots, \bar{x})$ on obtient

$$x_{n+1} = \frac{\partial f}{\partial u_0}(\bar{x}, \bar{x}, \cdots, \bar{x})y_n + \frac{\partial f}{\partial u_1}(\bar{x}, \bar{x}, \cdots, \bar{x})y_{n-1} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial u_k}(\bar{x}, \bar{x}, \cdots, \bar{x})y_{n-k} + o(x - \bar{x})$$

Qunad $n \to +\infty$, $o(x - \bar{x}) \to 0$, donc

$$x_{n+1} = p_0 y_n + p_1 y_{n-1} + \cdots + p_k y_{n-k}$$

et le polynôme caractéristique est

$$P(\lambda) = \lambda^{k+1} - p_0 \lambda^k - \ldots - p_k$$

Donc d'après the Theorème (2.2.6)

$$(\bar{x}_n)_{n \geq n_0} \ \textit{est asymptotiquement stable} \Leftrightarrow |\lambda_i| < 1, i = 1, \ldots, s.$$

■

Théorème 3.1.2 — Théorème de Clark . Une condition suffisante pour la stabilité locale asymptotique de l'équation (3.1) et

$$| p_0 | + | p_1 | + \cdots + | p_k | < 1.$$

Pour montrer cette théorème, on utilisant le Théorème de Rouché.

Théorème 3.1.3 — Théorème de Rouché. Soient $f(z)$, $g(z)$ deux fonctions holomorphes dans un ouvert Ω du plan complexe $\mathbb{C}$, et soit K un compact contenu dans Ω. Si on a

$$|g(z)| < |f(z)|, \ \forall\, z \in \partial K,$$

alors le nombre de zéros de $f(z) + g(z)$ dans K est égal au nombre de zéros de $f(z)$ dans K.

Proof. (Théorème de Clark) Soit

$$p(\lambda) = \lambda^{k+1} - p_0 \lambda^k - p_1 \lambda^{k-1} - \cdots - p_k$$

le polynôme caractéristique de l'équation linéaire associé de l'équation (3.1). Soient f et g deux fonctions complexes définies par

$$f(\lambda) = \lambda^{k+1}, \quad g(\lambda) = p_0 \lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + \cdots + p_k.$$

On a pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| = 1$

$$\begin{aligned} |g(\lambda)| &= |p_0 \lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + \cdots + p_k| \\ &\leq |p_0| + |p_1| + \cdots + |p_k| \\ &< 1. \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$|g(\lambda)| < |f(\lambda)|.$$

Alors par le Théorème de Rouché $f(\lambda)$ et $f(\lambda)+g(\lambda)$ ont le même nombres de zéros $(k+1)$ à l'intérieur du disque unité. Ainsi les racines du polynôme $P(\lambda)$ sont de modules inférieures à 1, et le résultat découle du Théorème (2.2.6).

■

■ Example 3.5

Soit l'équation aux différences

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{\alpha+\beta x_n} \quad n = 0,1,\ldots \tag{3.5}$$

$\alpha,\beta > 0$ et $x_{-1},x_0 \in [0,+\infty[$.

Etudier le comportemnt du point d'équilibre zéro.

Les points d'équilibre d'équation (3.5)***:***

Soit x un point d'équilbre de (3.5) donc

$$\begin{aligned} \bar{x} = \frac{\bar{x}}{\alpha+\beta\bar{x}} \quad &\Leftrightarrow \quad x(\alpha+\beta\bar{x}) = \bar{x} \\ &\Leftrightarrow \quad \beta\bar{x}^2 + (\alpha-1)\bar{x} = 0 \end{aligned}$$

- Si $\alpha > 1$: Les points d'équilibres sont: $\bar{x} = 0$ et $\bar{x} = \dfrac{1-\alpha}{\beta}$.
- Si $\alpha \leq 1$: Le seul point d'équilibre est: $\bar{x} = 0$.

L'équation linéare associée autor du point d'équilibre $\bar{x} = 0$ ***:***

Soit la fonction

$$\begin{aligned} f: \quad [0,+\infty[^2 \quad &\longrightarrow [0,+\infty[\\ (x,y) \quad &\longmapsto \frac{y}{\alpha+\beta x}. \end{aligned}$$

On a

$$\frac{\partial f}{\partial x} f(x,y) = \frac{-\beta y}{(\alpha+\beta x)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} f(x,y) = \frac{1}{(\alpha+\beta x)}.$$

D'où

$$p_0 = \frac{\partial f}{\partial x} f(0,0) = 0, \quad p_1 = \frac{\partial f}{\partial y} f(0,0) = \frac{1}{\alpha}.$$

Donc L'équation linéare associée à l'équation (3.5) autor du point d'équilibre $\bar{x} = 0$ est

$$y_{n+1} = \frac{1}{\alpha} y_{n-1}. \tag{3.6}$$

Le polynôme caractéristique de (3.6) est

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \frac{1}{\alpha}.$$

Les racines de $P(\lambda)$ sont: $\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ et $\lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$.

On a

$$|\lambda_i| = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} < 1 \Leftrightarrow \alpha > 1$$

Donc

- Si $\alpha > 1$:$\bar{x} = 0$ est assymptotiquement stable.
- Si $\alpha < 1$:$\bar{x} = 0$ est instable.

■

3.2 Théorèmes de convergences

On donne maintenant quelque théorèmes de convergence pour les équations aux différences d'ordre 2.

Théorème 3.2.1 Considérons l'équation aux différences définie par

$$x_{n+1} = g(x_n, x_{n-1}),\ n = 0, 1, \dots \tag{3.7}$$

avec

$$g : [a,b] \times [a,b] \to [a,b]\ , a, b \in \mathbb{R}.$$

Supposons que g est une fonction continue telle que

1) $g(x,y)$ est croissante par rapport à $x \in [a,b]$ pour chaque $y \in [a,b]$ et $g(x,y)$ et décroissante par rapport à $y \in [a,b]$ pour chaque $x \in [a,b]$,

2) Si (m,M) est une solution du système

$$\begin{cases} m = g(m,M) \\ M = g(M,m) \end{cases}$$

donc $m = M$.

Alors l'équation (3.7) admet un seul point d'équilibre $\bar{x}$ et toute solution de l'équation (3.7) converge vers $\bar{x}$.

Proof. ■

Théorème 3.2.2 Considérons l'équation aux différences définie par

$$x_{n+1} = g(x_n, x_{n-1}),\ n = 0, 1, \dots \tag{3.8}$$

avec

$$g : [a,b] \times [a,b] \to [a,b]\ , a, b \in \mathbb{R}.$$

Supposons que g est une fonction continue telle que

1) $g(x,y)$ est décroissante par rapport à $x \in [a,b]$ pour chaque $y \in [a,b]$ et $g(x,y)$ et croissante par rapport à $y \in [a,b]$ pour chaque $x \in [a,b]$,

2) Si (m,M) est une solution du système

$$\begin{cases} m = g(M,m) \\ M = g(m,M) \end{cases}$$

donc $m = M$.

Alors l'équation (3.8) admet un seul point d'équilibre $\bar{x}$ et toute solution de l'équation (3.8) converge vers $\bar{x}$.

Proof. ■

■ **Example 3.6** Considérons l'équation aux différences

$$x_{n+1} = \frac{2x_n + x_{n-1}}{x_n + 2x_{n-1}} \tag{3.9}$$

et $x_{-1}, x_0 \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$.

On a

$$x_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{2x_n+x_{n-1}}{x_n+2x_{n-1}}-\frac{1}{2}=\frac{3x_n}{2(x_n+2x_{n-1})}\geq 0.$$

donc

$$x_n \geq \frac{1}{2}.$$

$$x_{n+1}-2=\frac{2x_n+x_{n-1}}{x_n+2x_{n-1}}-2=\frac{-3x_n}{(x_n+2x_{n-1})}\leq 0.$$

donc

$$x_n \leq 2.$$

Donc $x_n \in \left[\frac{1}{2},2\right]$

Soit la fonction

$$\begin{array}{llll} f: & \left[\frac{1}{2},2\right]^2 & \longrightarrow & \left[\frac{1}{2},2\right] \\ & (x,y) & \longmapsto & \dfrac{2x+y}{x+2y}. \end{array}$$

On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{3y}{(x+2y)^2}\geq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{-3x}{(x+2y)^2}\leq 0$$

donc f est croissante par rapport à x et décroissante par rapport à y

Soit $m,M \in \left[\frac{b}{a},\frac{a}{b}\right]$ tels que

$$\begin{cases} m=f(m,M) \\ M=f(M,m) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=\dfrac{2m+M}{m+2M} \\ M=\dfrac{2M+m}{M+2m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Mm=\dfrac{M(2m+M)}{m+2M} \\ Mm=\dfrac{m(2M+m)}{M+2m} \end{cases}$$

Donc

$$\frac{M(2m+M)}{m+2M}=\frac{m(2M+bm)}{M+2m}$$

$$\begin{array}{rcl} (M^3-m^3)+4(M^2m-m^2M)-4(M^2m-m^2M) & = & 0 \\ (M-m)\left[m^2+M^2+mM\right] & = & 0 \end{array}$$

On a $(m^2+M^2)+mM>0$ alors $M-m=0$, d'aprés le Théorème (3.2.1) , l'équation (3.9) admet un seul ponit d'équlibre $\bar{x}=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=1$. ■

3.3 Des équations aux différences non linéaires qui se ramènent à des équations aux différences linéaires

Soit l'équations aux différences non linéaire

$$x_{n+1}x_n+p(n)x_{n+1}+q(n)x_n=0, \quad n=0,1,2,\ldots \tag{3.10}$$

avec p et q sont des fonctions reéls et $x_n\neq 0, \forall n\in\mathbb{N}_0$.

Posons $y_n=\dfrac{1}{x_n}$, on obtient

$$\frac{1}{y_{n+1}}\frac{1}{y_n}+\frac{p(n)}{y_{n+1}}+\frac{q(n)}{y_n}=0$$