Stabilité des équilibres. Exemples

Florian CARO et Alexandre POPIER

Introduction

Le but est de présenter quelques techniques pour l'étude des équilibres des équations différentielles du type :

$$x'(t) = f(x(t)) \quad et \quad x(t_0) = x_0 \tag{1}$$

pour t $\geq$ 0 et où $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est une fonction vérifiant au moins les conditions de Cauchy-Lipschitz (ici on supposera en plus f k-lipschitzienne : ainsi la solution de (1) est définie sur un intervalle non borné) et x est une fonction de [0,+∞[dans $\mathbb{R}^d$, solution de l'équation (1). On se limitera au cas où f ne dépend de t : (1) est alors appelée équation autonome.

On dit que a appartenant à $\mathbb{R}^d$ est un point d'équilibre si f(a) = 0, ainsi x $\equiv$ a est l'unique solution de (1) de condition initiale x(t_0) = a.

Notation : $\Phi(t, x_0)$ est la solution de (1) telle que $\Phi(t_0, x_0) = x_0$.

On appelle flot l'application $\Phi : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}^d$ qui à (x_0, t) associe $\Phi(t, x_0)$. Loi du flot, continuité du flot : voir [2].

Définition. 1 *(i) a est dit uniformément stable si :*

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \eta > 0 \; \|x_0 - a\| \leq \eta \Rightarrow \|\Phi(t, x_0) - a\| \leq \epsilon \quad \forall t > 0$$

(ii) a est dit uniformément asymptotiquement stable si a est uniformément stable et si :

$$\exists \rho > 0 \; \|x_0 - a\| \leq \rho \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} \Phi(t, x_0) = a$$

(iii) un équilibre qui n'est pas uniformément stable est dit instable.

Remarquons qu'en posant g(y) = f(y+a) on vérifie que a est un point d'équilibre de (1) si et seulement si 0 est un point d'équilibre de x' = g(x). Ainsi nous supposerons par la suite que a est égal à 0.

I Linéarisation

On suppose f de classe C^1 et on introduit le système suivant :

$$x'(t) = Df(0).x(t) \quad et \quad x(t_0) = x_0 \tag{2}$$

où Df(0) est la différentielle de f en 0. Le système (2) est appelé "système linéarisé". Il s'agit de "comparer" les solutions de (1) et de (2), à savoir :

(i) étudier les solutions dont les valeurs initiales sont proches de 0, en particulier si elles restent proches de 0 pour t $> t_0$.

(ii) comparer l'allure des solutions de (1) et de (2) au voisinage de 0.

I.1 Cas linéaire

On appelle $\nu(p)$ le plus petit entier k tel que $dim(Ker(A - \lambda_p I)^k) \;=\; mult(\lambda_p)$ (mult(λ_p) étant la multiplicité de λ_p dans le polynôme caractéristique de A) et λ est dite valeur propre oscillatoire de A lorsque $\nu(k) > 1$.

Théorème. 1 *Soit x'=Ax un système linéaire où A appartient à $\mathbb{R}^{d,d}$ (matrice de taille $d * d$) de valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$.*

a. 0 est un équilibre uniformément stable si et seulement si : $\forall i \ Re(\lambda_i) \leq 0 \ et \ Re(\lambda_k) < 0$ pour les valeurs propres oscillatoires.

b. 0 est un équilibre uniformément asymptotiquement stable si : $\forall i Re(\lambda_i) \leq -\sigma < 0$ et alors on a $\forall t \ \|\Phi(t, x_0)\| \leq K\|x_0\|e^{-\sigma t}$

c. s'il existe λ tel que Re(λ) > 0, alors 0 est instable.

Démonstration :
on écrit $\lambda_p \;=\; \alpha_p \;+\; i\beta_p$. La solution $\Phi(t, x_0)$ de x' = Ax telle que $\Phi(t_0, x_0) \;=\; x_0$ s'écrit :

$$\Phi(t, x_0) \;=\; \sum_{p=1}^{r} \quad \sum_{n=0}^{\nu(p)-1} \quad (A - \lambda_p I)^n \; \frac{t^n}{n!} \; e^{\alpha_p t} \; e^{i\beta_p t} \; x_0^{(p)}$$

où $x_0^{(p)}$ est la projection de x_0 sur $E_{\lambda_p} \;=\; Ker(A - \lambda_p I)^{\nu(p)}$.

Voir le cours de calcul différentiel (polycopié page 84)

On obtient le résultat en comparant la croissance des polynômes et des exponentielles en question; on constate, de plus, que la croissance ou la décroissance des solutions se font de façon exponentielle.

On va illlustrer ce résultat par le cas où d=2. On suppose que A est inversible de sorte que 0 est le seul point d'équilibre.

1. A a deux valeurs propres distinctes $\lambda_1 \ et \ \lambda_2$:

Soit $v_1 \ et \ v_2$ les vecteurs propres correspondant à $\lambda_1 \ et \ \lambda_2$: toute solution est de la forme $x(t) \;=\; a_1 \, e^{\lambda_1 t} \, v_1 \;+\; a_2 \, e^{\lambda_2 t} \, v_2$.

1^{er} *cas :* λ_1 et λ_2 *réels*

a. $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$: toutes les solutions tendent vers zéro quand t tend vers $+\infty$, v_1 et v_2 engendrent chacun un sous-espace stable. L'équilibre 0 s'appelle un nœud-stable encore appelé nœud attractif.

b. $0 < \lambda_1 < \lambda_2$: toutes les solutions s'éloignent vers l'infini quand t tend vers $+\infty$, v_1 et v_2 engendrent chacun un sous-espace instable. L'équilibre 0 s'appelle un nœud instable encore appelé nœud répulsif.

c. $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$: v_1 engendre un sous-espace instable. v_2 engendre un sous-espace stable. Seules les solutions dont la valeur initiale est colinéaire à v_2 restent bornées. 0 s'appelle un col ou point selle.

2^e *cas :* $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ *et* $\lambda_2 = \alpha - i\beta$

Les vecteurs propres sont donc de la forme $v_1 = u + iv$ *et* $v_2 = u - iv$. Les solutions réelles peuvent s'écrire : $x(t) = cte * e^{\alpha t}[cos(\beta t + \phi)u - sin(\beta t + \phi)v]$.

a. $\alpha = 0$: les solutions sont toutes périodiques. 0 s'appelle un centre.

b. $\alpha < 0$: toutes les solutions tendent vers zéro quand t tend vers $+\infty$ et 0 s'appelle un foyer ou point focal stable ou foyer attractif.

c. $\alpha > 0$: toutes les solutions tendent vers l'infini en module quand t tend vers $+\infty$ et 0 s'appelle un foyer ou point focal instable ou foyer répulsif.

2. A a une valeur propre double λ nécessairement rélle :

1^{er} *cas : λ est non oscillatoire*

On a alors A = λI et la solution x de x' = Ax est $x(t) = x_0 \, e^{\lambda t}$.

a. Si $\lambda < 0$, toutes les solutions tendent vers zéro quand t tend vers $+\infty$. 0 est un nœud stable qu'on appelle souvent puits (point attractif).

b. Si $\lambda > 0$, toutes les solutions s'éloignent vers l'infini quand t tend vers $+\infty$. O s'appelle source (point répulsif).

2^e *cas : λ est oscillatoire*

La dimension de $Ker(A - \lambda I)$ est un : soit u non nul engendrant $Ker(A - \lambda I)$. La dimension de $Ker[(A - \lambda I)^2]$ est deux : soit w$\in$ $Ker[(A - \lambda I)^2]$ formant avec u une base de $\mathbb{R}^2$, par hypothèse $(A - \lambda I)w \neq 0$ soit $(A - \lambda I)w = \alpha u + \beta w$ de sorte que

$0 = (A - \lambda I)^2 w = \beta(A - \lambda I)w$ donc $\beta = 0$; ainsi $(A - \lambda I)w = \alpha u$. On pose $v = \frac{w}{\alpha}$. x est de la forme $x(t) = (I + t(A - \lambda I))\, e^{\lambda t}\, x_0 = (I + t(A - \lambda I))\, e^{\lambda t}\, (au + bv)$

a. Si $\lambda < 0$, toutes les solutions tendent vers zéro quand t tend vers +∞ en étant tangentes au vecteur u. 0 est un nœud impropre stable (attractif).

b. Si $\lambda > 0$, toutes les solutions séloignent vers l'infini quand t tend vers +∞. O est un nœud impropre et stable (répulsif).

I.2 Théorème de linéarisation

Théorème. 2 *soit :*

$$x'(t) = f(x(t)) \quad et \quad x(t_0) = x_0 \tag{3}$$

avec f(0)=0 et soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de Df(0). Alors :

a. Si $\forall i\ Re(\lambda_i) \leq -\sigma < 0$ $x \equiv 0$ est un équilibre uniformément asymptotiquement stable de 3.

b. S'il existe i_0 : $Re(\lambda_{i_0}) > 0$ alors $x \equiv 0$ est un équilibre instable de 3.

c. Si $\forall i\ Re(\lambda_i) \leq 0$ et s'il existe i_0 : $Re(\lambda_{i_0}) \geq 0$ alors on ne peut rien dire.

Démonstration :

a. Sous l'hypothèse du a. il existe une constante K>1 telle que $\forall t \geq 0$ $\|e^{At}\| \leq Ke^{-\sigma t}$, en notant A = Df(0). 1 peut s'écrire x'(t) = A.x + g(x) où g(x) = f(x) - A.x. Ainsi :

$$\Phi(t, x_0) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}\Big(f(\Phi(s, x_0)) - A.\Phi(s, x_0)\Big)ds$$

d'où :

$$\|\Phi(t, x_0)\| \leq Ke^{-\sigma t}\|x_0\| + \int_0^t Ke^{-\sigma(t-s)}\|f(\Phi(s, x_0)) - A.\Phi(s, x_0)\|ds$$

Par définition de Df(0), $\forall \alpha\ \exists \beta(\alpha)$ *tel que* $\|x\| \leq \beta(\alpha) \Rightarrow \|f(x) - A.x\| \leq \alpha\|x\|$. Soit ϵ donné et α fixé tels que $\alpha K < \sigma$ et soit $i(\epsilon) = inf(\beta(\alpha), \epsilon)$. Alors $\forall x\ \|x\| \leq i(\epsilon) \Rightarrow \|f(x) - A.x\| \leq \alpha\|x\|$ posons enfin : $\eta(\epsilon) = i(\epsilon)/K$.

Comme $i(\epsilon) \leq \epsilon$ il faut vérifier que : $\forall t > 0 \; \|x_0\| \leq \eta(\epsilon) \Rightarrow \|\Phi(t, x-0)\| \leq i(\epsilon)$. Supposons ceci faux et soit $\theta = inf(\{s, \|\Phi(s, x_0)\| \geq i(\epsilon)\})$. Alors $0 < \theta < \infty$ et par continuité $\Phi(\theta, x_0) = i(\epsilon)$ (*). Si $t < \theta, \forall s \leq t \; \|f(\Phi(s, x_0)) - A.\Phi(s, x_0)\| \leq \alpha\|\Phi(s, x_0)\|$, d'où

$$t < \theta \Rightarrow e^{\sigma t}\|\Phi(t, x_0)\| \leq K\|x_0\| + \alpha K \int_0^t e^{\sigma s}\|\Phi(s, x_0)\| ds$$

Donc par le lemme de Gronwall, $e^{\sigma t}\|\Phi(t, x_0)\| \leq K\|x_0\| \, e^{\alpha K t}$. D'où $\|\Phi(t, x_0)\| \leq K\|x_0\| \, e^{(\alpha K - \sigma)t} < K\|x_0\|$ pour $t > 0$. En particulier, pour $t = \theta$ $\|\Phi(\theta, x_0)\| < i(\epsilon)$, ce qui contredit (*). Il est clair qu'alors

$$\lim_{t \to +\infty} \|\Phi(t, x_0)\| = 0$$

.

b. On sait qu'il existe deux sous-espaces de $\mathbb{R}^d$, notés E_1 et E_2, invariants par Df(0) tels que :

i. $\mathbb{R}^d = E_1 \oplus E_2$

ii. $A = Df(0)$ restreint à E_1 ait ses valeurs propres toutes de partie réelle strictement positives

iii. $B = Df(0)$ restreint à E_2 ait ses valeurs propres toutes de partie réelle négatives ou nulles.

On pose a strictement positif tel que a minore strictement les parties réelles de A et b tel que $0 < b < a$. Alors il existe deux normes euclidiennes définies respectivement sur E_1 et E_2 telles que :

$\forall x \in E_1, \forall y \in E_2, < Ax, x >_1 \geq a\|x\|_1^2 \; et \; < By, y >_2 \leq b\|y\|_2^2$

Enfin si z = (x,y) est dans $\mathbb{R}^d$, alors $\|z\| = (\|x\|_1^2 + \|y\|_2^2)^{\frac{1}{2}}$.

Utilisons maintenant le développement de Taylor de f en 0 :

f(x,y) = (A(x) + R(x,y),B(y) + S(x,y)) = (f_1(x,y),f_2(x,y)). Posons pour z = (x,y), Q(z) = (R(x,y),S(x,y)). Alors :

$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall z \in U = B(0, \delta) \; |Q(z)| \leq \epsilon |z|$.

On définit le cône C = {(x,y) $\in E_1 \oplus E_2$; $\|x\|_1 \geq \|y\|_2$}.

Soit $g : E_1 \times E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ qui à (x,y) associe $\frac{1}{2}(\|x\|_1^2 - \|y\|_2^2)$. g est de classe C^1, $g^{-1}([0, +\infty[) = C$, et $g^{-1}(0)$ = frontière de C.

Si $z \in U$, alors Dg(z)(f(z)) = Dg(x,y)(f_1(x,y),f_2(x,y)) = $< x, f_1(x, y) >_1 - < y, f_2(x, y) >_2$. D'après le lemme (1.a) (cf. annexe 1), Dg(z)(f(z)) ≥ 0 si $z \in g^{-1}(0)$. Ceci implique que si z(t) est une solution incluse dans U passant à travers la frontière de C, g est croissante le long de cette solution : $\frac{d}{dt}(g(z(t))) = Dg(z(t))(f(Z(t)))$. De là toute solution commençant dans C ne peut quitter C sans avoir quitté préalablement U.

De plus le (b) du lemme (1) nous donne que, si z = z(t) est une solution dans $C \cap U$, alors il existe $\alpha > 0$ tel que:

$< f(z), z > = < z', z > = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|z\|^2 \geq \alpha\|z\|^2$. Donc $\frac{d}{dt} log\|z\|^2 \geq 2\alpha$, soit $log\|z\|^2 \geq 2\alpha t + log\|z_0\|^2$, d'où $\|z\| \geq e^{\alpha t}\|z_0\|$. Donc z sort de U dès que $e^{\alpha t}\|z_0\| > \delta$ (et reste dans C tant qu'il n'est pas sorti de U). Ainsi aussi petit soit $\|z_0\|$, z sort de U.

Le lemme (1), ainsi que l'existence des normes euclidiennes de la démonstration, sont donnés en annexe.

Donnons un exemple pour le c. :

Soit le système

$$\begin{cases} x' = y + \epsilon \, (\, x^3 + 2x.y^2 \,) \\ y' = -x + \epsilon y^3 \end{cases}$$

$x \equiv 0 \; et \; y \equiv 0$ est un équilibre et

$$\forall \epsilon \; Df(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

de valeurs propres $\pm i$.

Si $\epsilon = 0$, le système est linéaire : x'=y et y'=-x et (0,0) est stable (pas asymptotiquement).

Soit $\epsilon \neq 0$, et $V(x,y) = x^2 + y^2$; soit $0 < x_0^2 + y_0^2 = \rho^2 < 1/\epsilon$. Lorsque (x,y) est solution du système, $\frac{d}{dt}\Big(V(x(t),y(t)\Big) = 2\epsilon\Big(V(t)\Big)^2$, d'où $V(t) = \frac{\rho^2}{1-2\epsilon\rho^2 t}$.

Si $\epsilon > 0$, V(t) est croissante et tend vers $+\infty$ si t tend vers $\frac{1}{2\epsilon\rho^2}$ donc aussi petit que soit ρ, la solution $\Phi(t,(x_0,y_0))$ s'éloigne à l'infini, (0,0) est instable.

Si $\epsilon < 0$, V(t) est décroissante et tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$ et (0,0) est uniformément asymptotiquement stable.

Ainsi, en perturbant aussi peu que l'on veut le système initial, on obtient soit un équilibre stable soit un équilibre instable ! Pourtant, tous ces systèmes ont même sytème linéarisé : seulement, $Re(\lambda) = 0$.

I.3 Stabilité structurelle

On se donne deux systèmes autonomes de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x' = f(x) & (1) \\ x' = g(x) & (2) \end{cases}$$

On s'intéresse au problème suivant : lorsque g est "proche de f", que dire des solutions de (1) et (2), se "ressemblent" -elles ?

Pour cela on a besoin de certaines notions :

Définition. 2 *i. une application $T : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ établit une correspondance entre les orbites de (1) et (2) si $\forall t\ \forall x\ T(\Phi(t,x)) = \Psi(t,T(x))$ en notant $\Phi(t,x)$ la solution de (1) telle que $\Phi(0,x) = x$ et $\Psi(t,x)$ la solution de (2) telle que $\Psi(0,x) = x$.*

ii. on dit que (1) et (2) sont linéairement équivalents s'il existe $T : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ linéaire, inversible qui établit une correspondance entre les orbites de (1) et (2).

iii. on dit que (1) et (2) sont différentiellement équivalents s'il existe $T : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ différentiable et d'inverse différentiable, qui établit une correspondance entre les orbites de (1) et (2).

iv. on dit que (1) et (2) sont topologiquement équivalents s'il existe $T : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ continue, inversible et d'inverse continue qui établit une correspondance entre les orbites de (1) et (2).

Théorème. 3 *(théorème de Hartmann)*

soit $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ de classe C^1, telle que f(0) = 0. On suppose aussi que les valeurs propres de Df(0) sont non nulles. Alors il existe un voisinage G de 0 tel que (1) x' = f(x) et (2) x' = Df(0).x soient topologiques équivalents dans G.

voir [5].

Ainsi au voisinage de 0 les orbites du système associé à f et de son linéarisé se déduisent les unes des autres par une transformation continue et d'inverse continue, mais cela n'implique qu'une ressemblance relativement faible entre les orbites.

Exemple :

En fait il existe un théorème plus précis lorsque f est de classe C^∞ et $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^2$:

Théorème. 4 *Sous ces hypothèses, et avec les notations précédentes :*

i. si (2) a un foyer en 0, les orbites de (1) s'enroulent autour de 0 et tendent vers 0 pour t tendant vers l'infini : 0 est un foyer pour (1).

ii. si (2) a un col en 0, (1) a un col en 0, il existe deux orbites qui sont des sous-ensembles invariants, l'un stable et tangent au sous-espace stable invariant de (2), l'autre instable et tangent au sous-espace invariant instable de (2).

iii. si (2) a un nœud, (1) a un nœud de même nature que (2). Dans le cas d'un nœud impropre toutes les orbites sont tangentes à celles de (2) au point 0, dans le cas d'un nœud propre elles le sont toutes sauf deux qui sont tangentes aux séparatrices de (2).

iv. si (2) a une source, (1) a une source; si (2) a un puits, (1) a un puits.

v. si (2) a un centre, (1) a soit un centre soit un foyer.

Les figures suivantes illustrent ce théorème :

système linéarisé (2) système original (1)

foyer (répulsif)

col

nœud propre (stable)

nœud impropre (stable)

II Systèmes dérivant d'un gradient, systèmes hamiltoniens

Dans cette partie, on va s'intéresser à un type de systèmes particuliers, fréquents en physique (pendule, problèmes mécaniques ou électrostatiques).

II.1 Gradient : définition et applications

Définition. 3 *soit U une application de classe C^2 de $\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$. On appelle système dérivant du gradient de U, ou système dérivant du potentiel U, une équation différentielle de la forme :*

$$\frac{dx}{dt} = -grad(U(x)) \tag{4}$$

Remarque. 1 *U étant de classe C^2, d'après Cauchy-Lipschitz, on sait qu'il existe une unique solution $\Phi(t, x_0)$ de (4) telle que $\Phi(t_0, x_0) = x_0$ pour tout x_0 appartenant au domaine de définition de U.*

Définition. 4 *Soit $x \equiv a$ un équilibre asymptotiquement stable d'une équation x' = f(x). On appelle domaine d'attraction de cet équilibre l'ensemble des points x_0 tels que :*

$$\lim_{t\to\infty} \Phi(t, x_0) = a$$

Remarque. 2 *Si Φ est solution de (4) :*

$$\frac{d}{dt}(U(\Phi(t))) = -\|grad(U(\Phi(t)))\|^2 \leq 0$$

donc $\forall t \geq t_0 \quad U(\Phi(t)) \leq U(\Phi(t_0))$.

Proposition. 1 *Soit $\frac{dx}{dt} = -grad(U(x))$ (4) un système dérivant d'un gradient. On suppose que 0 est équilibre de (4) et soit A = -H(U(0)) la matrice hessienne.*

Les valeurs propres de A sont réelles, ce qui permet de préciser la nature de l'équilibre lorsque A est inversible.

Démonstration :

$$H(U(0)) = \Big(\frac{\partial^2 U(0)}{\partial x_i \partial x_j}\Big)_{i,j}$$

est symétrique réelle donc diagonalisable et le système linéarisé de (4) est précisément $\frac{dx}{dt} = A.x$, ce qui permet d'appliquer les théorèmes précédents dans le cas où 0 n'est pas valeur propre.

Exemple : on prend $U(x, y) = x^2 + y^2(y - 1)^2$.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = -grad(U(x,y)) = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y(y-1)(2y-1) \end{pmatrix}$$

Alors O = (0,0), A = (0,1), B = (0,0.5) sont équilibres.
O et A sont asymptotiquement stables.
B est un point selle.

Les orbites fléchées sont orthogonales aux courbes de niveau.

Théorème. 5 *On suppose que U n'a qu'un nombre fini de points critiques dans toute partie compacte. Alors $\Phi(t, x_0)$ tend vers un point critique pour t tendant vers $+\infty$.*

Démonstration :

i. On établit d'abord le fait que si (t_n) tend vers $+\infty$ et si $\Phi_n = \Phi(t_n, x_0)$ tend vers a, alors grad(U(a)) = 0.

En effet la suite $U(\Phi_n)$ tend en décroissant vers U(a). Comme $t \mapsto U(\Phi(t, x_0))$ est monotone décroissante, on a $U(\Phi(t, x_0)) > U(a)$ pour tout $t \leq 0$.

Par ailleurs, si a n'est pas un point critique, $U(\Phi(1, a)) < U(a)$. Par continuité du flot, $U(\Phi(1, \Phi_n))$ tend vers $U(\Phi(1, a)) < U(a)$. Mais par la loi du flot, $U(\Phi(1, \Phi_n)) = U(\Phi(1 + t_n, x_0)) > U(a)$. Contradiction.

ii. Si $\big(\Phi(t, x_0)\big)_{t \leq 0}$ a deux valeurs d'adhérence a_0 et a_1, on a la figure suivante :

Soit S une petite sphère centrée en a_0, évitant tous les points critiques. Par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à $t \mapsto \|\Phi(t, x_0) - a_0\|^2$, on voit que l'orbite O_{x_0} coupe S en une infinité de points. Comme S est compacte, S contient une valeur d'adhérence de O_{x_0}, c'est-à-dire un point critique en vertu du point i. Contradiction.

II.2 Systèmes hamiltoniens, systèmes conservatifs

Définition. 5 *Considérons un système dérivant d'un gradient dans $\mathbb{R}^d$:*

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -grad(U(q)) \quad q = (q_1 \ldots q_d) \tag{5}$$

On pose

$$\forall i \; p_i = \frac{dq_i}{dt} \; , \; T(p) = \sum_{i=1}^{d} \frac{p_i^2}{2} \; et \; H(p,q) = T(p) + U(q)$$

H(p,q) est appelé Hamiltonien du système. Alors le système devient :

$$(S) \begin{cases} \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} & i = 1 \ldots d \\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} & i = 1 \ldots d \end{cases}$$

Remarque. 3 *Si q est solution de 5, alors on a :*

$$\frac{d}{dt}\Big(H(p(t), q(t))\Big) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} = 0$$

Ainsi H est une intégrale première de (S), ie H(p(t),q(t)) = constante.

Théorème. 6 *Si l'origine est un minimum isolé du potentiel U, c'est un équilibre stable qui n'est pas asymptotiquement stable pour (S).*

Démonstration :

La démonstration consiste tout d'abord à vérifier que si O est un minimum isolé de U, c'est en fait un minimum isolé de H. On considère ensuite la solution Φ issue de (p_0, q_0), l'orbite de Φ est la projection de la courbe $z = H(p_0, q_0)$ sur le sous-espace z = 0 de $\mathbb{R}^{2d+1}$, ce qui établit la stabilité de la solution $\Phi(t) \equiv 0$ et le fait qu'aucune solution ne peut avoir pour limite l'origine.

Définition. 6 *Nous appellerons* <u>*système conservatif*</u> *du second ordre un système dont l'équation est la suivante : soit x appartenant à* $\mathbb{R}$*. Il existe f de classe* C^1 *et (S) :* $\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) = 0$.

Soit $F(q) = \int_0^q f(s)ds$*. Dans le plan de phase un tel système est un système hamiltonien dont le Hamiltonien H est :* $H(p,q) = \frac{1}{2}p^2 + F(q) \quad (q = x,\ p = \frac{dx}{dt})$.

Les orbites de (S) sont : $p^2 + 2F(q) =$ *constante, un point d'équilibre a est tel que f(a) = 0.*

Théorème. 7 *(cas d'instabilité)*

soit

$$(S) : \frac{d^2x}{dt^2} + f(x) = 0$$

un système conservatif.

On suppose que f(0) = 0 et qu'il existe α *tel que* $0 \leq |q| \leq \alpha \Rightarrow F(q) < 0 \quad , q \equiv 0$ *est alors équilibre instable.*

Démonstration :

Comme f(0) = 0, q = x $\equiv$ 0 est bien solution. Soit $p_0 > 0$ et (0,p_0) un point initial voisin de (0,0) : sur la trajectoire issue de ce point

$$\frac{p(t)^2}{2} + F(q(t)) = \frac{p_0^2}{2}$$

et tant que $|q(t)| \leq \alpha$, $\frac{p(t)^2}{2} > \frac{p_0^2}{2}$ donc $|\frac{dq}{dt}| > p_0$. Or $\frac{dq}{dt}$ est continue, donc soit $\frac{dq}{dt} > p_0$, soit $\frac{dq}{dt} < -p_0$. Donc en intégrant on a $|q(t)| \geq p_0 t$.

Donc si on suppose l'origine stable, il existe $p_0 > 0$ suffisamment petit tel que $\forall\ t \geq 0\ |q(t)| \leq \alpha$. Or d'après ce qui précède, on a : $\forall\ t \geq 0\ |q(t)| \geq p_0 t$, ce qui est absurde.

II.3 Application : le pendule sans frottement

Orbites du pendule dans l'espace des phases (q,p) où $p = \frac{dx}{dt}$ est la vitesse du pendule et q = x est son angle.

L'équation $\frac{d^2x}{dt^2} + sin(x) = 0$ s'écrit

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases} \quad \text{en posant } H = \frac{p^2}{2} + (1 - cos(q))$$

Les orbites sont les courbes H = constante = a.
Si a = 0 : p = 0 q = $2k\pi$

Si a = $\epsilon << 1$: $p^2 + q^2 \sim 2\epsilon$
petites oscillations

Si a = 1 : p = $\pm\sqrt{2cos(q)}$ $(cos(q) \geq 0)$
oscillations périodiques

Si a = 2 : $p^2 = 4cos^2(\frac{q}{2})$
on va d'un équilibre instable à un autre dans un temps infini : cas apériodique.

Si $a > 2$: rotations complètes indéfinies.

Figure récapitulative : les courbes $p = \pm 2cos(\frac{q}{2})$ s'appellent séparatrices.

Remarque. 4 *Le système est un système conservatif. Si on remplace dans l'équation du pendule le + par un -, ce qui revient à un décalage de π, (0,0) serait un équilibre instable (théorème 6).*

III Théorie de Lyapounov

Dans cette partie on va montrer comment utiliser des fonctions auxiliaires pour obtenir des renseignements sur la stabilité des solutions (le potentiel en était un premier exemple).

III.1 Définitions et théorèmes

Définition. 7 *Soit 0 l'origine de $\mathbb{R}^d$ et Ω un voisinage de 0. On dit que U, fonction définie sur Ω et à valeurs réelles, est définie positive dans Ω si U(0) = 0 et $U(x) > 0$ lorsque x≠0.*

Définition. 8 *Soit (3) un système autonome avec t_0 = 0. Une fonction U de classe C^1 définie positive sur un voisinage Ω de 0 est dite une fonction de Lyapounov pour 3 si pour toute solution Φ de 3 :*

$$\frac{d}{dt}(U(\Phi(t))) \leq 0.$$

Le gradient est une fonction de Lyapounov particulière, d'après la remarque (2) du II.1.

On note $\dot{U}(x) = < grad(U(x)), f(x) >$. Ainsi une fonction définie positive telle que $\dot{U}(x) \leq 0$ est une fonction de Lyapounov pour 3 puisque $\frac{d}{dt}(U(\Phi(t))) = < grad(U(\Phi(t))), f(\Phi(t)) > = \dot{U}(\Phi(t))$.

Enfin B_ρ désignera la boule fermée de centre 0 et de rayon ρ.

Théorème. 8 *(Lyapounov)*

Soit (1) $\frac{dx}{dt} = f(x)$ un système autonome dont 0 est un équilibre.

a. S'il existe une fonction U définie sur un voisinage Ω de 0 où elle est une fonction de Lyapounov de (1), x≡0 est un équilibre uniformément stable.

b. Si, en plus, $-\dot{U}(x)$ est définie positive dans Ω, x≡0 est un équilibre uniformément asymptotiquement stable dont le domaine d'attraction contient B_ρ dès que B_ρ est contenue dans Ω.

c. S'il existe dans Ω une fonction V de classe C^1 et un nombre δ tels que : V(0) = 0 et $V(x) > 0$ pour tout x tel que $0 < \|x\| < \delta$ et $\dot{V}$ soit définie positive, alors x≡0 est un équilibre instable.

Démonstration : a. Ω étant un voisinage de 0, il existe $\epsilon > 0$ tel que la sphère S_ϵ de centre O et de rayon ϵ soit incluse dans Ω.

Soit $m = inf\{U(x); x \in S_\epsilon\}$ alors : $\forall \epsilon > 0,\ m > 0$.

U étant continue, il existe $\eta < \epsilon$ tel que $\|x\| \leq \eta \Rightarrow U(x) < m$. Soit $\|x_0\| \leq \eta$, alors

$U(\Phi(t, x_0) \leq U(x_0) < m \,\forall\, t$. La trajectoire $\Phi(t, x_0)$ ne peut donc pas atteindre S_ϵ pour tout t puisqu'au point x_1 où elle l'atteindrait, on aurait $U(x_1) \geq m$.

b. Soit $\Phi(t, x_0)$ une solution avec $x_0 \in B_\eta \setminus \{0\}$. D'après le a., 0 est stable donc $\Phi(t, x_0)$ reste dans la boule B_ϵ compacte. Donc si t_n est une suite tendant vers $+\infty$, quitte à extraire, on peut supposer :

$$\lim_{n \to +\infty} \Phi(t_n, x_0) = z_0$$

Alors $\forall\, t \geq 0\, U(\Phi(t, x_0)) > U(z_0)$. Si z_0 est différent de 0, alors on a : $\forall\, s \geq 0\, U(\Phi(s, z_0)) < U(z_0)$.

Montrons alors que si y est suffisamment proche de z_0, alors il existe s>0 tel que $U(\Phi(s, y)) < U(z_0)$. En effet on a : $\forall\, t \geq 0\, U(\Phi(t, y)) - U(z_0) = U(y) - U(z_0) + \int_0^t \dot{U}(\Phi(s, y))ds$. Or par hypothèse $\forall\, t \geq 0\, \dot{U}(\Phi(t, y)) < 0$ (car si y est non nul, $\Phi(t, y)$ est non nul pour tout t). Donc il existe s et ϵ strictement positifs tels que $\int_0^t \dot{U}(\Phi(s, y))ds$ soit strictement plus petit que $-\epsilon$. Or, comme U est continue, il existe γ strictement positif tel que, si $\|y - z_0\| < \gamma$, alors $\|U(y) - U(z_0)\| < \epsilon$; d'où le résultat annoncé.

On conclut en prenant $y = \Phi(t_n, x_0)$ pour un n suffisamment grand : $U(\Phi(s, y)) = U(\Phi(t_n + s, x_0)) < U(z_0)$, ce qui apporte la contradiction. Donc 0 est la seule limite possible pour $\{\Phi(t, x_0); t \geq 0\}$.

c. Soit $0 < \|x_0\| < \delta$ et $A = \{x; \|x\| < \delta \; et \; V(x) \geq V(x_0)\}$. Comme V(0)=0, 0 n'appartient pas à A. Il existe même une boule B_ϵ tel que $B_\epsilon \cap A = \emptyset$ et $B_\epsilon \subset \{x; V(x) < \frac{V(x_0)}{2}\}$.

Ainsi $\alpha = inf\{\dot{V}(x); x \in A\} > 0$. Comme $V(\Phi(t))$ est une fonction croissante de t pour toute solution Φ, $\Phi(t, x_0)$ ne peut que rester dans A ou quitter B_δ.

Soit $\theta = inf\{t; \|\Phi(t, x_0)\| = \delta\}$. $V(\Phi(t, x_0) = V(x_0) + \int_{t_0}^t \dot{V}(\Phi(s, x_0))\, ds$

Si $t > t_0$ cette expression est supérieure ou égale à $V(x_0) + \alpha.t$ et comme V est bornée sur B_δ, $\Phi(t, x_0)$ ne peut pas rester dans A. Donc θ existe et est nécessairement fini. Ainsi pour tout x_0 $\|x_0\|$ aussi petite que l'on veut, il existe $\theta < \infty$ tel que $\Phi(t, x_0)$ atteigne l'ensemble S_δ à l'instant θ : 0 est instable.

Exemple : soit le système (S) suivant

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(y^2 - 1) \\ \frac{dy}{dt} = y(x^2 - 1) \end{cases}$$

x = y = 0 est solution de (S). Le systéme linéarisé a pour matrice

$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

. Il est uniformément asymptotiquement stable; l'origine est donc un équilibre uniformément asymptotiquement stable (théorème (2)).

L'existence d'une fonction de Lyapounov va nous donner ici en plus une information sur le domaine d'attraction. Soit U(x,y) = $\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$; $\dot{U}(x, y) = x^2(y^2 - 1) + y^2(x^2 - 1)$. Soit $\Omega = \{x^2 + y^2 < 1\}$. Sur Ω, $\dot{U}(x, y)$ est définie négative : on retrouve que 0 est uniformément asymptotiquement stable mais en plus que $\forall (x_0, y_0) \in \Omega$ la solution issue de ce point a pour limite 0.

Théorème. 9 *(théorème de Lasalle)*

i. soit (I) x'=f(x) un système autonome de $\mathbb{R}^d$. On suppose qu'il existe un ensemble fermé G, une fonction positive U de classe C^1 sur G et $a < +\infty$ tels que $G = \{(x, y); 0 \leq U(x) \leq a\}$

et $\dot{U}(x) \leq 0$ dans G. Soit E = $\{x \in G; \dot{U}(x) = 0\}$ et M le plus grand sous-ensemble invariant pour (I) contenu dans E. Alors :

$$\lim_{t \to +\infty} distance(\Phi(t, x_0), M) = 0 \quad \forall x_0 \in G$$

ii. si f(0) = 0 et si 0 est le seul sous-ensemble invariant de E pour (I), alors 0 est uniformément asymptotiquement stable et son domaine d'attraction contient G.

III.2 Exemples

Premier exemple : équation de Van der Pol :

Soit (E) :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0$$

où λ est strictement positif.

En posant $y = \frac{dx}{dt}$, (E) est équivalente à :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = \lambda(x^2 - 1)y - x \end{cases}$$

Soit $U(x, y) = x^2 + y^2$, alors $\dot{U} = 2\lambda y^2(x^2 - 1)$.

Soit $G = \{(x, y); 0 \leq U(x, y) \leq 1\}$. Alors $\dot{U}(x, y) \leq 0$ dans G. Soit $E = \{x \in G; \dot{U}(x) = 0\} = \{(x, y); y = 0\}$ et le seul ensemble invariant contenu dans E est (0,0). D'après le théorème de Lasalle, la solution $\Phi(t, (x_0, y_0))$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$ avec (x_0, y_0) dans G. L'origine est donc asymptotiquement stable et son domaine d'attraction contient G.

L'équation générale de Van der Pol est : (F) : $\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x = 0$, où λ est strictement positif. Si Ψ est solution de (F), alors $\Phi(t) = \Psi(-t)$ est solution de (E). Ainsi les orbites de (E) et (F) sont les mêmes, mais parcourues dans des sens inverses, ce qui suffit pour montrer que 0 est un équilibre instable.

Deuxième exemple : pendule avec frottement :

Soit (E) :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + sin(x) = 0$$

et le système équivalent :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -y - sin(x) \end{cases}$$

Soit $U(x, y) = \frac{y^2}{2} + 1 - cos(x)$ et $H = \{(x, y); U(x, y) \leq 2\}$. Alors $\dot{U}(x, y) = -y^2$ et H est un ensemble fermé dont la frontière est $y^2 = 4cos^2(\frac{x}{2})$. On considère la partie de cet ensemble comprise entre $-\pi$ et π. Soit $G = \{(x, y); U(x, y) \leq 2 - \epsilon\}$. On prend la partie G_0 de G comprise entre $-\pi$ et π : c'est la partie hachurée.

Soit $E = \{(x,y) \in G; \dot{U}(x,y) = 0\}$, le seul sous-ensemble invariant de E est (0,0). Donc d'après le théorème de Lasalle, les solutions dont la valeur initiale est dans G_0 ont pour limite 0. Si on prend la partie de H comprise entre $(2k-1)\pi$ et $(2k+1)\pi$ et la partie G_k de G correspondante, on constate que toutes les solutions incluses dans cette partie G_k ont pour limite ($2k\pi$,0) : ces équilibres sont donc asymptotiquement stables.

Les équilibres (($2k+1)\pi$,0) sont instables puisque le système linéarisé a pour matrice :

$$Df((2k+1)\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$: ce sont des cols.

On peut alors esquisser les orbites d'un pendule avec frottements et les rapprocher de celles du pendule sans frottement :

pendule sans frottement pendule avec frottement

Conclusion

La méthode de Lyapounov ainsi présentée est très puissante dès lors qu'on ait trouver la bonne fonction de Lyapounov. En effet il n'existe pas de méthode générale pour trouver des fonctions de Lyapounov. Cependant il existe quelques résultats : par exemple en présence d'intégrales premières on peut souvent conclure en combinant certaines d'entre elles, une autre méthode consiste á utiliser pour une équation obtenue par perturbations d'une autre équation une fonction de Lyapounov de l'équation initiale. On peut encore utiliser le fait que si un équilibre a certaines propriétés de stabilité, il existe des fonctions de Lyapounov, qu'on peut parfois utiliser, sans les avoir déterminées, pour des équations voisines de l'équation initiale.

References

[1] H. Reinhardt "Equations différentielles", Dunod Université

[2] V. Arnold "Equations différentielles ordinaires", Editions Mir, Moscou

[3] J.-P. Demailly "Analyse numérique et équations différentielles", Presses universitaires de Grenoble, 1991

[4] M. Hirsch-S. Smale "Differential equations, Dynamical systems and Linear algebra", Academic Press, 1974

[5] Hartman "Ordinary Differential Equations", Wiley-Interscience, New-York, 1970

Annexe 1

Compléments sur la démonstration du théorème (2).

Lemme. 1 *Il existe $\delta > 0$ tel que si $U = B(0,\delta)$, alors $\forall z = (x,y) \in C \cap U$:*
a. $< x, f_1(x,y) >_1 - < y, f_2(x,y) >_2 \geq 0$ pour $x \neq 0$
b. il existe $\alpha > 0$ tel que $< f(z), z > \geq \alpha\|z\|^2$.

Preuve du lemme (avec les notations de la démonstration du théorème (2)):

Commençons par le (b). On a : $< f(z), z > = < Ax, x >_1 + < By, y >_2 + < Q(z), z > \geq a\|x\|_1^2 - b\|y\|_2^2 - \epsilon\|z\|^2$. Dans C, $\|x\|_1^2 \geq \frac{1}{2}\|z\|^2$ car $\|x\|_1 \geq \|y\|_2$. Donc $< f(z), z > = \geq (\frac{a}{2} - \frac{b}{2} - \epsilon)\|z\|^2$. Il suffit de choisir ϵ tel que $\alpha = (\frac{a}{2} - \frac{b}{2} - \epsilon) > 0$.

Pour le (a), le membre de gauche de l'inégalité est égal à : $< Ax, x >_1 - < By, y >_2 + < x, R(x,y) >_1 - < y, S(x,y) >_2$, et $| < x, R(x,y) >_1 - < y, S(x,y) >_2 | \leq 2| < z, Q(z) > |$. On procède alors comme précédemment. On choisit les paramètres tels que $\frac{a}{2} - \frac{b}{2} - 2\epsilon > 0$.

Montrons maintenant l'existence des normes euclidiennes introduites dans la démonstration.

Lemme. 2 *Soit A$\in \mathbb{R}^{d,d}$. Il existe α et β tels que pour toute valeur propre λ de A on ait $\alpha < Re(\lambda) < \beta$. Alors il existe un produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$ tel que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \; \alpha < x, x > \leq < Ax, x > \leq \beta < x, x >$$

Preuve du lemme :

On plonge A dans $\mathbb{C}^{d,d}$. A est trigonalisable. Donc il existe une base de $\mathbb{C}^d$ $(e_i)_{i = 1,\ldots,d}$ telle que

$$\forall 1 \leq i \leq d \quad Ae_i = \sum_{j=i}^{d} a_{i,j} e_j$$

En considérant pour $\lambda > 0$ $\epsilon_i = \lambda^i e_i$, on a

$$\forall 1 \leq i \leq d \quad A\epsilon_i = \sum_{j=i}^{d} a_{i,j} \lambda^{i-j} \epsilon_j$$

les $b_{i,j} = a_{i,j}\lambda^{i-j}$ sont tous inférieurs à ϵ en module pour tout ϵ dès que $i \neq j$ et λ assez grand. On peut trouver α' et β' tels que pour toute valeur propre λ de A on ait $\alpha < \alpha' < Re(\lambda) < \beta' < \beta$. Pour ϵ assez petit, $\alpha \leq ma' - \epsilon$ et $\beta' + \epsilon \leq \beta$.

Si $\{.,.\}_\epsilon$ est la forme sesquilinéaire associée à ϵ_i et avec $< .,. >_\epsilon$ la partie réelle de $\{.,.\}_\epsilon$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \; < Ax, x >_\epsilon = Re(\sum_{i=1}^{d} \lambda_i x_i^2 + \sum_{j=i+1}^{d} b_{i,j} x_i x_j) = \sum_{i=1}^{d} Re(\lambda_i) x_i^2 + \sum_{j=i+1}^{d} Re(b_{i,j}) x_i x_j < (\beta' + \epsilon) < x, x >_\epsilon$$

car $Re(b_{i,j}) \leq |b_{i,j}| \leq \epsilon$ De même $(\alpha' - \epsilon) < x, x >_\epsilon \leq < Ax, x >_\epsilon$, d'où le résultat.

Cela donne l'existence de $< .,. >_1$ et si $0 < b < a$ on a bien $Re(\lambda_B) \leq b$, d'où l'existence de $< .,. >_2$.

Annexe 2

Voici trois exemples traités sous Maple, les systèmes sont les suivants :

i.

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x + e^{-y} \\ y' & = & -y \end{array}\right.$$

avec pour point d'équilibre (-1,0).

ii.

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & -y + x(x^2 + y^2) \\ y' & = & x + y(x^2 + y^2) \end{array}\right.$$

au voisinage de (0,0).

iii. équation de Van der Pol :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & y \\ y' & = & -x + y(1 - x^2) \end{array}\right.$$

au voisinage de (0,0).