CHAPITRE III

OPERATEURS COMPACTS
DECOMPOSITION SPECTRALE DES OPERATEURS AUTOADJOINTS COMPACTS

III.1 - Définitions. Propriétés élémentaires. Adjoint

Soient X et Y deux espaces de Banach et B_X est la Boule unité fermée de X.

Définition III-1:

On dit qu'un opérateur $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ est compact si $A(B_X)$ est relativement compact pour la topologie forte. On désigne $\mathbb{K}(X, Y)$ l'ensemble des opérateurs compacts et on pose $\mathbb{K}(X) = \mathbb{K}(X, X)$

Théorème III-1:

L'ensemble $\mathbb{K}(X, Y)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(X, Y)$ (pour la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$)

Démonstration :

Il est clair que la somme de deux opérateurs compacts est un opérateur compact.

Soient $\{A_n\} \subset \mathbb{K}(X, Y)$, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ et

$\|A_n - A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \longrightarrow 0$. Montrons que $A \in \mathbb{K}(X, Y)$.

Comme Y est complet il suffit de vérifier que, pour tout $\varepsilon > 0$, $A(B_X)$ peut être recouvert par un nombre fini de Boules $B(f_i, \varepsilon)$ dans Y. On fixe n tel que $\|A_n - A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \frac{\varepsilon}{2}$. Comme $A_n(B_X)$ est relativement compact.

$$A_n(B_X) \subset \bigcup_{i \in I} B(f_i, \tfrac{\varepsilon}{2}) \quad \text{avec } I \text{ fini}.$$

Donc $A(B_X) \subset \bigcup_{i \in I} B(f_i, \varepsilon)$

Définition III - 2 :

On dit qu'un opérateur $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ est de rang fini si $\dim(\operatorname{Im} A) < +\infty$

Remarque III-1 :

Il est clair qu'un opérateur de rang fini est compact.

Corollaire III-1 :

Soit $\{A_n\}$ une suite d'opérateurs continus de rangs finis de X dans Y et soit $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ tels que $\|A_n - A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \to 0$. Alors $A \in \mathcal{K}(X, Y)$.

Remarque III-2 :

La réciproque du corollaire III 1 (précédent) est en général fausse (i.e étant donné un opérateur compact, existe-t-il une suite (A_n) d'opérateurs de rangs finis telle que $A_n \to A$ dans $\mathcal{L}(X, Y)$) :
Toutefois si Y est un espace de Hilbert la réponse est affirmative.

Théorème III-2)

Si X ou Y sont de dimension finie, alors

$$\mathcal{K}(X, Y) = \mathcal{L}(X, Y).$$

Démonstration)

Soit X de dimension finie alors B_X sera compact d'où $A(B_X)$ est compact pour tout $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, car A est continu.

Supposons que Y soit de dimension finie donc $A(B_X)$ est borné donc relativement compact (puisque Y est de dimension finie).

Remarque III-3)

Toute fonctionnelle linéaire $f \in X^*$ est compacte (Il suffit de se rappeler que f fait correspondre à X un espace de dimension 1).

Proposition III-1 :

Soient $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ et $B \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Si l'un au moins de ces deux opérateurs est compact, alors leur produit BA est un opérateur compact.

Démonstration :

Soit B_X la boule unité fermé de X. Si A est un opérateur compact, $A(B_X)$ est relativement compact, d'où $BA(B_X)$ est relativement compact (B est continu) c'est-à-dire que BA est compact.
Si c'est B qui est compact, alors $A(B_X)$ est borné, $BA(B_X)$ sera relativement compact et BA est compact.

Théorème III-3 : (Schauder)

Soit $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. L'opérateur A est compact si et seulement si son adjoint A^* est compact.

Démonstration :

Montrons que $A^*(B_{Y^*})$ est relativement compact dans X^*. Soit $\{v_n\}$ une suite de B_{Y^*} ; montrons que l'on peut extraire une sous-suite telle que $A^*(v_{n_k})$ converge.

Soit $\mathbb{K} = \overline{A(B_X)}$ (compact) et soit $\mathcal{H} \subset C(\mathbb{K})$ défini par

$$\mathcal{H} = \{ \varphi_n : y \in \mathbb{K} \longmapsto \langle v_n, y \rangle ; n = 1, 2, \dots \}$$

Les hypothèses du théorème d'Ascoli sont satisfaites et on peut donc extraire une sous-suite notée φ_{n_k} qui converge dans $C(\mathbb{K})$ vers une fonction $\varphi \in C(\mathbb{K})$, en particulier

$$\sup_{x \in B_X} \left| \langle \varphi_{n_k} | Ax \rangle - \varphi(Ax) \right| \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0 .$$

Donc

$$\sup_{x \in B_X} \left| \langle \varphi_{n_k} | Ax \rangle - \langle \varphi_{n_\ell} | Ax \rangle \right| \underset{k, \ell \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

ie $\| A^* \varphi_{n_k} - A^* \varphi_{n_\ell} \|_{X^*} \underset{k, \ell \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Par conséquent $\{ A^* \varphi_{n_k} \}$ converge dans X^*.

Réciproquement; supposons que A^* est compact.
D'après ce qui précède A^{**} est compact de X^{**} dans Y^{**} et en particulier
$A^{**}(B_X)$ est relativement compact dans Y^{**}.
Or $A(B_X) = A^{**}(B_X)$ et Y est fermé dans Y^{**}. Par conséquent $A(B_X)$ est relativement compact dans Y.

III - 2 La théorie de Riesz - Fredholm

Donnons d'abord quelques résultats préliminaire

Lemme III - 1 : (Lemme de Riesz)

Soit X un espace vectoriel normé et soit $M \subset X$ un sous-espace fermé tel que $M \neq X$.

Alors $\forall \varepsilon > 0$ $\exists u \in X$ tel que $\|u\| = 1$ et $dist(u, M) \geq 1 - \varepsilon$

Démonstration :

Soit $v \in X$, avec $v \notin M$. Comme M est fermé, alors $d = dist(v, M) > 0$. On choisit $m_0 \in M$ tel que

$$d \leq \|v - m_0\| \leq \frac{d}{1 - \varepsilon}$$

Alors

$$u = \frac{v - m_0}{\|v - m_0\|}$$

répond à la question

En effet si $m \in M$ on a

$$\|u - m\| = \left\| \frac{v - m_0}{\|v - m_0\|} - m \right\| \geq 1 - \varepsilon$$

puisque $m_0 + \|v - m_0\| m \in M$

Théorème III-4 : (Riesz)

Soit X un espace vectoriel normé tel que B_X soit compact Alors X est de dimension finie.

Démonstration

Raisonnons par l'absurde. Si X est de dimension infinie, il existe une suite (X_n) de sous-espaces de dimension finie tels que $X_{n-1} \subsetneq X_n$. Grâce au lemme III-1 on peut construire une suite $\{u_n\}$ avec $u_n \in X_n$, $\|u_n\| = 1$

et $\text{dist}(u_n, \underline{X}_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$. En particulier

$\|u_n - u_m\| \geq \frac{1}{2}$ pour $m < n$. Donc la suite $\{u_n\}$ n'admet aucune sous-suite convergente - ce qui est contraire à l'hypothèse " $B_{\underline{X}}$ compact ".

<u>Théorème III-5</u> : (Alternative de Fredholm)

Soit $A \in \mathbb{K}(\underline{X})$. Alors.

a) $\text{Ker}(I-A)$ est de dimension finie.

b) $\text{Im}(I-A)$ est fermé, et plus précisément

$$\text{Im}(I-A) = \text{Ker}(I-A^*)^{\perp}$$

c) $\text{Ker}(I-A) = \{0\} \Leftrightarrow \text{Im}(I-A) = \underline{X}$.

d) $\dim(\text{Ker}(I-A)) = \dim(\text{Ker}(I-A^*))$.

Remarque III-4 :

L'Alternative de Fredholm concerne la résolution de l'équation $u - Au = f$. Elle exprime que :

ou bien pour tout $f \in X$ l'équation $u - Au = f$ admet une solution unique ; ou bien l'équation homogène $u - Au = 0$ admet n solutions linéairement indépendantes et, dans ce cas, l'équation non homogène $u - Au = f$ est résoluble si et seulement si f vérifie n conditions d'orthogonalité (ie $f \in \ker(I - A^*)^{\perp}$).

Remarque III-5 :

La propriété c) est familière en dimension finie. Si $\dim X < +\infty$, un opérateur linéaire de X dans lui-même est injectif si et seulement s'il est surjectif. Par conséquent en dimension infinie un opérateur borné peut être injectif sans être surjectif et inversement.

Démonstration du Théorème III-5 :

a) Soit $X_0 = \mathrm{Ker}(I-A)$. Alors $B_{X_0} \subset A(B_X)$ et donc B_{X_0} est compact. D'après le théorème III-4 X_0 est de dimension finie.

b) Soit $f_n = u_n - Au_n \to f$. Il faut montrer que $f \in \mathrm{Im}(I-A)$. Posons $d_n = \mathrm{dist}(u_n, \mathrm{Ker}(I-A))$ comme $\mathrm{Ker}(I-A)$ est de dimension finie il existe $v_n \in \mathrm{Ker}(I-A)$ tel que $d_n = \|u_n - v_n\|$ on a

$$(*) \qquad f_n = (u_n - v_n) - A(u_n - v_n)$$

Montrons que $\|u_n - v_n\|$ reste borné. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une sous-suite telle que $\|u_{n_k} - v_{n_k}\| \to +\infty$.

En posant $w_n = \dfrac{u_n - v_n}{\|u_n - v_n\|}$, on aurait grâce à (*) que $w_{n_k} - Aw_{n_k} \to 0$. Extrayant une sous-suite (qu'on note encore (w_{n_k})) on peut supposer $Aw_{n_k} \to z$ (A compact). Donc $w_{n_k} \to z$ et $z \in \ker(I-A)$. D'autre part

$$\operatorname{dist}(w_n, \ker(I-A)) = \frac{\operatorname{dist}(u_n, \ker(I-A))}{\|u_n - v_n\|} = 1.$$

(puisque $v_n \in \ker(I-A)$). A la limite on obtient $\operatorname{dist}(z, \ker(I-A)) = 1$ .. ce qui est absurde

Par conséquent $\|u_n - v_n\|$ reste borné et comme A est compact on peut extraire une sous-suite telle que $A(u_{n_k} - v_{n_k}) \to l$.

On déduit de (*) que

$$u_{n_k} - v_{n_k} \to f + e \ ; \text{ en posant } g = f + e$$

on a $\quad g - Ag = f \quad$ ie $\quad f \in \mathrm{Im}(I-A)$.

On a donc montré que l'opérateur $I-A$ est à image fermée et de là on aura :

$$\mathrm{Im}(I-A) = \ker(I-A^*)^{\perp}$$

et $\quad \mathrm{Im}(I-A^*) = \ker(I-A)^{\perp}$

c) Prouvons d'abord l'implication "$\Rightarrow$"

Raisonnons par l'absurde et supposons que

$$X_1 = \mathrm{Im}(I-A) \neq X$$

X_1 est un espace de Banach et

$A(X_1) \subset X_1$. Donc $A|_{X_1} \in K(X_1)$

et $X_2 = (I-A)(X_1)$ est un sous-espace fermé

de X_1. De plus $X_2 \neq X_1$ (puisque $(I-A)$

est injectif). En posant $X_n = (I-A)^n X$ on

obtient ainsi une suite strictement décroissante

de sous-espaces fermés. D'après le lemme

de Riesz (Lemme III-1) il existe une suite

$\{u_n\}$ telle que $u_n \in X_n$, $\|u_n\| = 1$ et

$\mathrm{dist}(u_n, X_{n+1}) \geq \frac{1}{2}$. On a :

$$Au_n - Au_m = -(u_n - Au_n) + (u_m - Au_m) + (u_n - u_m)$$

Notons que si $n > m$. $X_{n+1} \subset X_n \subset X_{m+1} \subset X_m$

et par conséquent

$-(u_n - Au_n) + (u_m - Au_m) + u_n \in X_{m+1}$

Donc

$\|Au_n - Au_m\| \geq \frac{1}{2}$ ce qui est absurde

puisque A est compact. Donc $Im(I-A) = X$.

Inversement, supposons que $Im(I-A) = X$.

Alors $Ker(I-A^*) = Im(I-A)^\perp = \{0\}$. Puisque

$A^* \in \mathcal{K}(X^*)$ on peut appliquer ce qui

précède à A^* et conclure que $Im(I-A^*) = X^*$

Or $Ker(I-A) = Im(I-A^*)^\perp = \{0\}$.

d) Soient $d = \dim(Ker(I-A))$

et $d^* = \dim(Ker(I-A^*))$

On va d'abord montrer que $d^* \leq d$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $d < d^*$. Comme $\mathrm{Ker}(I-A)$ est de dimension finie il admet un supplémentaire topologique dans X ; il existe donc un projecteur P de X sur $\mathrm{Ker}(I-A)$.

D'autre part $\mathrm{Im}(I-A) = \mathrm{Ker}(I-A^*)^{\perp}$ est de codimension finie d^* et par conséquent $\mathrm{Im}(I-A)$ admet (dans X) un supplémentaire topologique, noté Y, de dimension d^*.

Comme $d<d^*$, il existe une application linéaire $\Lambda : \mathrm{Ker}(I-A) \longrightarrow Y$ qui est injective et non surjective. Posons

$$S = A + (\Lambda \circ P), \quad \text{alors } S \in \mathcal{K}(X)$$

puisque $\Lambda \circ P$ est de rang fini.

Montrons que $\ker(I-S)=\{0\}$; en effet si

$$0 = u - Su = (u-Au) - (\Lambda o P u)$$

alors $u - Au = 0$ et $\Lambda o P u = 0$

ie $u \in \ker(I-A)$ et $\Lambda u = 0$; donc $u=0$

En appliquant c) à l'opérateur S on voit que $\mathrm{Im}(I-S) = X$. Ceci est absurde puisqu'il existe $f \in Y$, $f \notin \mathrm{Im}(\Lambda)$, l'équation $u - Su = f$ n'admet pas de solution.

Par conséquent on a prouvé que $d^* \leq d$.

Si on applique le même résultat à A^* on voit que $\dim \ker(I-A^{**}) \leq \dim \ker(I-A^*) \leq \dim \ker(I-A)$

Or $\ker(I-A^{**}) \supset \ker(I-A)$ ce qui permet de conclure que $d = d^*$.