Chapitre 1

RAPPELS ET QUELQUES RESULTATS D'ANALYSE FONCTIONNELLE

Dans ce chapitre on rappelle des notions telles que les espaces vectoriels normés, les espaces de *Banach*, les espaces de *Hilbert* ainsi que quelques résultats généraux d'analyse fonctionnelle, qu'on utilisera le long de ce cours.

1.1 Les espaces de *Banach*

Définition $1-1$

Un espace vectoriel $\mathbf{X}$ sur le corps $\Bbbk$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est appelé espace vectoriel normé si à tout élément $x \in \mathbf{X}$ correspond un nombre positif $\|x\|$ (appelé norme de x) tel que les trois axiomes suivants, dits axiomes de la norme, sont vérifiés :

$$1) \ \|x\| \geq 0 \ ; \ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \qquad \text{(la norme est non dégénérée) ;} \tag{1.1}$$

$$2) \ \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \qquad \text{(la norme est homogène) ;} \tag{1.2}$$

$$3) \ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \text{(inégalité triangulaire).} \tag{1.3}$$

Exemples

1) L'espace vectoriel $C[a\ ,\ b]$ de toutes les fonctions continues sur $[a\ ,\ b]$, muni de la norme

$$\|x\|_0 = \max_{[a\ ,\ b]} |x(t)| \tag{1.4}$$

est un espace vectoriel normé.

2) L'espace vectoriel $C^k[a\ ,\ b]$ des fonctions k fois continûment dérivables sur $[a\ ,\ b]$, $k \geq 1$, muni de la norme

$$\|x\|_{c^k} = \sum_{i=0}^{k} \max_{[a\ ,\ b]} \left|x^{(i)}(t)\right| \tag{1.5}$$

où $x^{(i)}(t)$ est la dérivée $i^{ième}$ de la fonction $x(t)$, est un espace vectoriel normé.

3) L'espace vectoriel $L^2(\Omega)$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$, des fonctions de carré intégrable sur Ω muni de la norme

$$\|x\|_{L^2}^2 = \int_{\Omega} |x(t)|^2 \, dt \tag{1.6}$$

est un espace vectoriel normé.

4) L'espace vectoriel $C[a\ ,\ b]$ des fonctions continues sur $[a\ ,\ b]$ muni de la norme $\|.\|_{L^2}$, donnée ci-dessus, est un espace vectoriel normé.

Soit $\mathbf{X}$ un espace vectoriel normé et soit $\{x_n\}$ une suite d'éléments de $\mathbf{X}$.

Définition $1-2$

On dit que l'élément $x_0 \in \mathbf{X}$ est la limite de la suite $\{x_n\}$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n - x_0\| = 0$. Autrement dit

$$\forall\varepsilon > 0\ ,\ \exists N > 0\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \ [n > N \ \Rightarrow \|x_n - x_0\| < \varepsilon\ ]\ . \tag{1.7}$$

On note $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$ ou $x_n \to x_0$ quand $n \to +\infty$, et on dit que la suite $\{x_n\}$ converge ou tend vers x_0 ou tout simplement que la suite $\{x_n\}$ est convergente.

Définition $\mathbf{1-3}$

On dit que la suite $\{x_n\}$ est une suite de *Cauchy* si

$$\forall\varepsilon > 0 \ , \ \exists N = N(\varepsilon) > 0 \ , \ \forall n \in \mathbb{N} \ , \ [\ n > N, \ \forall p \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon \ ] . \quad (1.8)$$

Lemme 1

Toute suite convergente dans $\mathbf{X}$ est une suite de *Cauchy*.

Remarque 1

La réciproque du lemme 1 n'est pas toujours vraie, car il existe des espaces vectoriels normés dans lesquels on peut trouver des suites de *Cauchy* qui n'y sont pas convergentes.

Définition $\mathbf{1-4}$

Un espace vectoriel normé est dit complet si toute suite de *Cauchy* y est convergente. Un espace normé complet est appelé espace de *Banach*.

Exemples

1) L'espace vectoriel $C\,[a\ ,\ b]$ muni de la norme $\|.\|_0$, donnée par la relation (1.4), est un espace de *Banach*.

2) L'espace vectoriel $C^k\,[a\ ,\ b]$ muni de la norme$\|.\|_k$, donnée par la relation (1.5), est un espace de *Banach*.

3) L'espace vectoriel $L^2\,(\Omega)$, des fonctions de carré intégrable sur Ω muni de la norme $\|.\|_{L^2}$, donnée par la relation (1.6), est un espace de *Banach*.

4) L'espace vectoriel $C\,[-a\ ,\ a]$, $a > 0$, de toutes les fonctions continues sur $[-a\ ,\ a]$, muni de la norme $\|.\|_{L^2}$, n'est pas un espace de *Banach*. Car on peut facilement démon-

trer que la suite $\{x_n\}$, de fonctions continues sur $[-a\ ,\ a]$, donnée par

$$x_n(t) = \begin{cases} -1 \text{ si } & t \in \left[-a\ ,\ -\dfrac{1}{n}\right], \\ nt \text{ si } & t \in \left[-\dfrac{1}{n}\ ,\ \dfrac{1}{n}\right], \\ 1 \text{ si } & t \in \left[\dfrac{1}{n}\ ,\ a\right], \end{cases}$$

est une suite de *Cauchy* dans l'espace vectoriel normé $(C[-a\ ,\ a]\ ,\ \|.\|_{L^2})$ mais qui ne converge pas dans $C[-a\ ,\ a]$, pour la norme $\|.\|_{L^2}$, et que sa limite est

$$x(t) = \begin{cases} -1 \text{ si } & t \in [-a\ ,\ 0[\ , \\ 0 \text{ si } & t = 0\ , \\ 1 \text{ si } & t \in]0\ ,\ a]\ . \end{cases}$$

qui est une fonction discontinue, i.e. $x(t) \notin C[-a\ ,\ a]$.

1.1.1 Les séries dans les espaces normés et les espaces de *Banach*

Soit $\mathbf{X}$ un espace normé. On appelle série dans $\mathbf{X}$ une somme formelle $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} x_k$ où $x_k \in \mathbf{X}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Considérons la suite $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} x_k$, $n \in \mathbb{N}$, des sommes partielles de la série $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} x_k$.

<u>Définition 1 − 5</u>

On dit que la série $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} x_k$ converge dans $\mathbf{X}$ ou elle est convergente dans $\mathbf{X}$ si la suite des sommes partielles $\{S_n\}$ converge dans $\mathbf{X}$. Si la série $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} x_k$ est convergente dans $\mathbf{X}$, on a $S_n \to S \in \mathbf{X}$ pour $n \to +\infty$. L'élément S s'appelle la somme de la série $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} x_k$. La notation $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} x_k = S$ veut dire que la série est convergente et de somme S.

<u>Proposition 1 − 1</u>

Si $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x_k = S_1\ ,\ \sum_{k=0}^{+\infty} y_k = S_2$ alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (\alpha x_k + \beta\ y_k) = \alpha S_1 + \beta S_2. \tag{1.9}$$

<u>Théorème 1 − 1</u>

Soit $\mathbf{X}$ un espace de *Banach*. Pour qu'une série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ soit convergente il faut et il suffit que

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists N = N(\varepsilon) > 0\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \left[\ n > N,\ \forall p \in \mathbb{N}\ \Rightarrow \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \right\| < \varepsilon\ \right]. \tag{1.10}$$

<u>Démonstration</u>

Elle résulte de la définition d'une série convergente et de la relation entre une suite convergente et une suite de *Cauchy* appliquée à la suite des sommes partielles.

<u>Proposition 1 − 2</u>

Si la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ est convergente alors $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} x_k = 0.$

<u>Définition 1 − 6</u>

Si la série numérique $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \|x_k\|$ est convergente on dit, alors, que la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ est absolument convergente.

<u>Théorème 1 − 2</u>

Si $\mathbf{X}$ est un espace de *Banach*, alors toute série absolument convergente est convergente.

<u>Démonstration</u>

En effet, puisque on sait que $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall p \in \mathbb{N}$ on a

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\|$$

alors la convergence de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ en découle en vertu du théorème 1-1.

Théorème $1-3$

Si toute série absolument convergente dans un espace normé $\mathbf{X}$ est convergente alors $\mathbf{X}$ est un espace de *Banach*.

Démonstration

Soit $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ une suite de *Cauchy*. Montons qu'elle converge vers un élément $x \in \mathbf{X}$. En effet, puisque $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ une suite de *Cauchy*, on peut alors en extraire une sous-suite $\{x_{n_k}\}$ telle que

$$\|x_{n_1}\| < \frac{1}{2} \quad \text{et que pour tout} \quad k \geq 2 \quad \text{il y ait} \quad \left\|x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\right\| < \frac{1}{2^k}.$$

Soit la série $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ où $u_1 = x_{n_1}$ et $u_k = x_{n_k} - x_{n_{k-1}}$, $k \geq 2$. Il est facile de voir que c'est une série absolument convergente, car $\|u_k\| < \frac{1}{2^k}$, $\forall k \geq 1$, et que la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$ est convergente. Alors, il existe un élément $x \in \mathbf{X}$ vers lequel la suite des sommes partielles $\{S_k\}$ de la série $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$. On peut facilement vérifier que $S_k = x_{n_k}$ et par suite $x_{n_k} \to x$ pour $k \to +\infty$. C'est-à-dire que la sous-suite $\{x_{n_k}\}$ de la suite de *Cauchy* $\{x_n\}$ converge vers x ce qu'il en est de même de la suite de *Cauchy* $\{x_n\}$.

1.1.2 Espaces de *Banach* de base dénombrable et espaces séparables.

Définition $1-7$

Un espace vectoriel $\mathbf{X}$ est dit de dimension infinie si pour tout entier naturel n on peut trouver une famille libre de n éléments de $\mathbf{X}$.

Définition $1-8$

Soit $\mathbf{X}$ un espace de *Banach* de dimension infinie. Une suite $\{e_k\}_1^{+\infty} \subset \mathbf{X}$ est appelée base dans $\mathbf{X}$ si tout élément $x \in \mathbf{X}$ se laisse mettre d'une façon unique sous la forme d'une série convergente

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \xi_k e_k. \tag{1.11}$$

Les scalaires $\xi_1,\ \xi_2, ...$s'appellent alors les coordonnées de x par rapport à la base $\{e_k\}_1^{+\infty}$.

Remarque 2

Puisque x se représente (se décompose) d'une façon unique dans la base, alors toute famille finie d'éléments de la base est libre. Ainsi donc, la notion de base dans un espace de dimension infinie généralise d'une manière naturelle la notion analogue dans un espace de dimension finie.

Définition 1 – 9

Un espace vectoriel normé $\mathbf{X}$ est dit séparable s'il contient un ensemble dénombrable dense dans $\mathbf{X}$.

Proposition 1 – 3

Tout espace de *Banach* de base dénombrable est séparable.

1.2 Les espaces de *Hilbert*

Soit $\mathbf{E}$ est un $\Bbbk$ - espace vectoriel, où le corps des scalaires $\Bbbk$ est toujours considéré $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1 – 10

Une forme sesquilinéaire φ sur $\mathbf{E}$ est une application

$$\varphi\ : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \to \mathbb{C}$$

telle que

$$x \mapsto \varphi(x\ ,\ y) \text{ est antilinaire (linéaire dans le cas réel);} \tag{1.12}$$

$$y \mapsto \varphi(x\ ,\ y) \text{ est linaire.} \tag{1.13}$$

Ce qui signifie qu'on a les propriétés suivantes pour tous vecteurs $x,\ y,\ x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2$ de $\mathbf{E}$ et pour tout scalaire λ :

$$\varphi(\lambda x\ ,\ y) = \overline{\lambda}\varphi(x\ ,\ y) \quad ; \quad \varphi(x\ ,\ \lambda y) = \lambda\varphi(x\ ,\ y) \quad ; \tag{1.14}$$

$$\varphi(x_1 + x_2\ ,\ y_1 + y_2) = \varphi(x_1\ ,\ y_1) + \varphi(x_1\ ,\ y_2) + \varphi(x_2\ ,\ y_1) + \varphi(x_2\ ,\ y_2). \tag{1.15}$$

Remarque 3

Dans le cas réel, i.e $\mathbf{E}$ est un espace vectoriel reél, la forme φ est définie de $\mathbf{E} \times \mathbf{E}$ dans $\mathbb{R}$ et elle est dite bilinéaire.

Définition 1 – 11

Une forme sesquilinéaire φ sur $\mathbf{E}$ est dite

(i) hermitienne si

$$\varphi(x\ ,\ y) = \overline{\varphi(y\ ,\ x)},\ \forall (x\ ,\ y) \in \mathbf{E} \times \mathbf{E} \ \text{(Symétrique dans le ca réel) ;} \tag{1.16}$$

(ii) positive si

$$\varphi(x\ ,\ x) \geq 0, \quad \forall x\ \in \mathbf{E}\ \ ; \tag{1.17}$$

(iii) définie positive si

$$\varphi(x\ ,\ x) = 0 \Leftrightarrow x = 0. \tag{1.18}$$

Définition 1 – 12

Une forme sesquilinéaire sur $\mathbf{E}$ hermitienne définie positive est appelée un produit scalaire sur $\mathbf{E}$ et notée

$$(x\ ,\ y) \in \mathbf{E} \times \mathbf{E} \mapsto \ \varphi(x\ ,\ y) = (x\ /\ y) \in \mathbb{C}. \tag{1.19}$$

Remarque 4

Dans le cas où $\mathbf{E}$ est est un espace vectoriel réel, un produit scalaire sur $\mathbf{E}$ est une forme bilinéaire sur $\mathbf{E}$ symétrique définie positive.

Exemples

1) Sur l'espace vectoriel $\mathbb{C}^m$ (resp. $\mathbb{R}^m$) la forme sesquilinéaire (resp. bilinéaire)

$$(x \ / \ y) = \sum_{i=1}^{m} \overline{x_i}\, y_i \qquad (\text{resp. } (x \ / \ y) = \sum_{i=1}^{m} x_i \ y_i \ ) \tag{1.20}$$

où $x = (x_1, \ x_2, ..., x_m)$ et $y = (y_1, \ y_2, ..., y_m) \in \mathbb{C}^m$ (resp. $\in \mathbb{R}^m$) définit un produit scalaire.

2) Sur l'espace vectoriel $L^2(\Omega)$, des fonctions de carré intégrable sur Ω, la forme sesquilinéaire (resp. bilinéaire pour les fonctions à valeurs réelles)

$$(x \ / \ y) = \int_{\Omega} \overline{x(t)} y(t) dt \qquad (\text{resp. } (x \ / \ y) = \int_{\Omega} x(t) y(t) dt \ ) \tag{1.21}$$

définit un produit scalaire.

Soit $\mathbf{E}$ un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. On définit une application de $\mathbf{E}$ dans $\mathbb{R}^+$ par

$$x \in \mathbf{E} \ \mapsto \ \|x\| = \sqrt{(x \ / \ x)} \in \mathbb{R}^+. \tag{1.22}$$

Théorème $1-4$

Soit $\mathbf{E}$ un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Alors on a :

1- l'inégalité de $Cauchy - Schwarz$

$$|(x \ / \ y)| \leq \|x\| \, \|y\| \ , \ \forall (x \ , \ y) \in \mathbf{E} \times \mathbf{E} \ ; \tag{1.23}$$

2- l'inégalité de $Minkowski$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \ , \ \forall (x \ , \ y) \in \mathbf{E} \times \mathbf{E} \ . \tag{1.24}$$

Démonstration

Montrons d'abord l'inégalité de $Cauchy - Schwarz$ et l'inégalité de $Minkowski$ ne sera qu'une simple conséquence de la première.

En effet, Soient x et $y \in \mathbf{E}$ considérons pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ le trinôme

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\lambda) &= (x + \lambda y \ / \ x + \lambda \ y) = (x \ / \ x) + \lambda(x \ / \ y) + \lambda(y \ / \ x) + \lambda^2(y \ / \ y) \\ &= \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(x \ / \ y)\lambda + \lambda^2 \|y\|^2 \geq 0\end{aligned}$$

(où Re désigne la partie réelle), alors le discriminant du trinôme $\mathbf{P}(\lambda)$ doit être ≤ 0 , donc

$$[\mathrm{Re}(x \ / \ y)]^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0$$

c'est-à-dire

$$|\mathrm{Re}(x \ / \ y)| \leq \|x\| \, \|y\| \, . \tag{1.25}$$

Si on est dans le cas réel, i.e. le produit scalaire est réel, alors l'inégalité (1.25) n'est autre que l'inégalité cherchée. Si le produit scalaire est complexe, on sait que $\forall (x \ , \ y) \in \mathbf{E} \times \mathbf{E}$ il existe un θ tel que $(x \ / \ y) = |(x \ / \ y)| \, e^{i\theta}$; donc $e^{-i\theta}(x \ / \ y) = |(x \ / \ y)| \geq 0$ et

$$|(x \ / \ y)| = e^{-i\theta}(x \ / \ y) = (e^{i\theta}x \ / \ y) = \left|\mathrm{Re}(e^{i\theta}x \ / \ y)\right| \leq \left\|e^{i\theta}x\right\| \|y\| = \|x\| \, \|y\| \, . \tag{1.26}$$

Montrons maintenant l'inégalité de $Minkowski$.

En effet, on sait que

$$\|x + y\|^2 = (x+y \ / \ x+ y) = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(x \ / \ y) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\,\|x\| \, \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \tag{1.27}$$

c'est-à-dire l'inégalité de $Minkowski$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \, .$$

Proposition 1 − 4

L'application définie par la relation (1.22) de **E** dans $\mathbb{R}^+$

$$x \in \mathbf{E} \mapsto \|x\| = \sqrt{(x \ / \ x)} \in \mathbb{R}^+$$

est une norme sur **E** dite norme induite par le produit scalaire.

Définition 1 − 13

Un espace vectoriel **E** muni d'un produit scalaire et de la norme induite est appelé espace préhilbertien.

Théorème 1 − 5 (*L'égalité du parallélogramme*)

Soit **E** espace préhilbertien et soient x et $y \in \mathbf{E}$. Alors on a l'égalité suivante

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \ , \tag{1.28}$$

appelée égalité du parallélogramme (qui signifie que dans un parallélogramme la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés).

Démonstration

En effet, on sait que

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= (x+y \ / \ x+ \ y) = (x \ / \ x) + (x \ / \ y) + (y \ / \ x) + (y \ / \ y) \\ &= \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(x \ / \ y) + \|y\|^2 \ , \end{aligned} \tag{1.29}$$

et donc

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\,\mathrm{Re}(x \ / \ y) + \|y\|^2 \quad , \tag{1.30}$$

d'où

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Théorème 1 − 6 (*Les identités de polarisation*)

Soient $x,\ y$ deux éléments d'un espace préhilbertien **E**. Alors on a

$$(x\ /\ y) = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|y-x\|^2\right] \tag{1.31}$$

si **E** est un espace vectoriel réel et

$$\begin{aligned}(x\ /\ y) &= \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|y-x\|^2\right] + \frac{i}{4}\left[\|y+ix\|^2 - \|y-ix\|^2\right] \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} i^k \left\|y+i^k x\right\|^2\end{aligned} \tag{1.32}$$

si **E** est un espace vectoriel complexe.

Démonstration

D'après les relations (1.29) et (1.30) on peut déduire que

$$\mathrm{Re}(x\ /\ y) = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|y-x\|^2\right] \tag{1.33}$$

$$\mathrm{Im}(x\ /\ y) = \mathrm{Re}\left[-i(x\ /\ y)\right] = \mathrm{Re}\left[(ix\ /\ y)\right] = \frac{1}{4}\left[\|y+ix\|^2 - \|y-ix\|^2\right]\ , \tag{1.34}$$

d'où la conclusion du théorème.

Remarque 5

D'après ce qui précède, on sait qu'un produit scalaire sur un espace vectoriel **E** induit une norme sur **E**. Mais il est tout à fait naturel de se poser la question sur la réciproque i.e. si ($\mathbf{E}\ ,\ \|.\|$) est un espace normé, alors qu'elle est la condition pour laquelle la norme de **E** sera déduite d'un produit scalaire sur **E** **?** La réponse est donnée par le théorème suivant.

Théorème 1 − 7

Soit **E** un espace normé muni d'une norme $\|.\|$ qui vérifie l'égalité du parallélogramme alors cette norme est déduite d'un produit scalaire sur **E**.

(i) Si l'espace $\mathbf{E}$ est réel alors

$$(x \ / \ y) = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right] \tag{1.35}$$

est un produit scalaire sur $\mathbf{E}$.

(ii) Si l'espace $\mathbf{E}$ est complexe alors

$$\begin{aligned}(x \ / \ y) &= \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|y-x\|^2\right] + \frac{i}{4}\left[\|y+ix\|^2 - \|y-ix\|^2\right] \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} i^k \left\|y+i^k x\right\|^2 \end{aligned} \tag{1.36}$$

est un produit scalaire sur $\mathbf{E}$.

<u>Démonstration</u>

Montrons d'abord le cas réel, i.e. le cas où $\mathbf{E}$ est un espace réel. Montrons que la forme (1.35) est une forme bilinaire symétrique définie positive sur $\mathbf{E}$ et donc elle définit un produit scalaire sur $\mathbf{E}$.

Remarquons d'abord que la relation (1.35) ainsi définie est symétrique i.e.

$$(x \ / \ y) = (y \ / \ x) \quad , \ \forall (x \ , \ y) \in \mathbf{E} \times \mathbf{E}.$$

Montrons ensuite qu'elle est linéaire par rapport à x, i.e. montrons que pour tout $y \in \mathbf{E}$ on a

$$1) \quad (x_1 + x_2 \ / \ y) = (x_1 \ / \ y) + (x_2 \ / \ y) \quad , \ \forall x_1, x_2 \in \mathbf{E} \ ; \tag{1.37}$$

$$2) \quad \lambda(x \ / \ y) = (\lambda x \ / \ y), \ \forall x \in \mathbf{E} \ , \forall \lambda \in \mathbb{R}. \tag{1.38}$$

En effet, d'après la relation (1.35) on sait que

$$(x_1 + x_2 \ / \ y) = \frac{1}{4}\left[\|x_1+x_2+y\|^2 - \|x_1+x_2-y\|^2\right]$$

et puisque la norme $\|.\|$ vérifie l'égalité du parallélogramme alors on a

$$\|x_1 + x_2 + y\|^2 + \|x_1 + y - x_2\|^2 = 2(\|x_1 + y\|^2 + \|x_2\|^2) \ ; \tag{1.39}$$

$$\|x_1 + x_2 - y\|^2 + \|x_1 - y - x_2\|^2 = 2(\|x_1 - y\|^2 + \|x_2\|^2) \ ; \tag{1.40}$$

$$\|x_1 + x_2 + y\|^2 + \|x_2 + y - x_1\|^2 = 2(\|x_2 + y\|^2 + \|x_1\|^2) \ ; \tag{1.41}$$

$$\|x_1 + x_2 - y\|^2 + \|x_2 - y - x_1\|^2 = 2(\|x_2 - y\|^2 + \|x_1\|^2) \ . \tag{1.42}$$

Sachant que

$$\|x_1 + y - x_2\| = \|x_2 - y - x_1\| \quad \text{et} \quad \|x_1 - y - x_2\| = \|x_2 + y - x_1\| \ ,$$

alors par soustraction des deux premières équations membres à membres, i.e. (1.39) et (1.40), et des deux dernières équations, i.e. (1.41) et (1.42), ensuite en sommant les deux équations trouvées membres à membres on trouve

$$\|x_1 + x_2 + y\|^2 - \|x_1 + x_2 - y\|^2 = (\|x_1 + y\|^2 - \|x_1 - y\|^2) + (\|x_2 + y\|^2 - \|x_2 - y\|^2),$$

donc pour tout $y \in \mathbf{E}$ on a

$$(x_1 + x_2 \ / \ y) = (x_1 \ / \ y) + (x_2 \ / \ y) \ , \ \forall x_1, x_2 \in \mathbf{E} \ ,$$

c'est-à-dire la forme donnée par (1.35) est additive par rapport à x.

Montrons maintenant qu'elle est aussi homogène i.e.

$$\lambda(x \ / \ y) = (\lambda x \ / \ y), \ \forall x \in \mathbf{E} \ , \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Puisque on vient de démontrer que la forme est additive par rapport à x alors il est facile de vérifier que

$$n(x \ / \ y) = (nx \ / \ y), \ \forall x \in \mathbf{E} \ , \forall n \in \mathbb{N} \ ; \tag{1.43}$$

et comme

$$-(x \ / \ y) = (-x \ / \ y) \quad \text{car} \quad 0 = (0 \ / \ y) = (x - x \ / \ y) = (x \ / \ y) + (-x \ / \ y). \tag{1.44}$$

Alors pour tout $y \in \mathbf{E}$ on a

$$p(x \ / \ y) = (px \ / \ y), \ \forall x \in \mathbf{E} \ , \forall p \in \mathbb{Z}. \tag{1.45}$$

De même il est facile de voir que pour tout $y \in \mathbf{E}$ et pour $m \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\frac{1}{m}(x \ / \ y) = (\frac{1}{m}x \ / \ y), \ \forall x \in \mathbf{E} \ , \forall m \in \mathbb{N}^*, \tag{1.46}$$

car

$$(x \ / \ y) = (\frac{m}{m}x \ / \ y) = m(\frac{1}{m}x \ / \ y). \tag{1.47}$$

Ainsi donc pour tout $y \in \mathbf{E}$ on a

$$\frac{1}{q}(x \ / \ y) = (\frac{1}{q}x \ / \ y), \ \forall x \in \mathbf{E} \ , \forall q \in \mathbb{Z}^*. \tag{1.48}$$

Des relations (1.45) et (1.48) on déduit alors que pour tout $y \in \mathbf{E}$ on a

$$r(x \ / \ y) = (rx \ / \ y), \ \forall x \in \mathbf{E} \ , \forall r \in \mathbb{Q}. \tag{1.49}$$

Finalement, en utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, i.e. $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, on peut démontrer que pour tout $y \in \mathbf{E}$

$$\lambda(x \ / \ y) = (\lambda x \ / \ y), \ \forall x \in \mathbf{E} \ , \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

En effet, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ il existe une suite $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{Q}$ telle que $\lambda_n \to \lambda$ quand $n \to +\infty$. De la relation (1.35) et puisque la norme $\|.\|$ est une application continue sur $\mathbf{E}$ alors on peut facilement déduire que

$$\lambda(x \ / \ y) = \lim_{n\to+\infty} \lambda_n(x \ / \ y) = \lim_{n\to+\infty} (\lambda_n x \ / \ y) = (\lambda x \ / \ y), \ \forall x \in \mathbf{E} \ ,$$

c'est-à-dire que la forme donnée par (1.35) est linéaire par rapport à x.

Montrons maintenant que la forme (1.35) est aussi linéaire par rapport à y.

Par symétrie on peut facilement vérifier que si elle est linéaire par rapport à x elle est aussi linéaire par rapport à y. En effet, si elle est linéaire par rapport à x alors

$$\lambda(x \ / \ y) = \lambda(y \ / \ x) = (\lambda y \ / \ x) = (x \ / \ \lambda y), \ \forall (x \ , \ y) \in \mathbf{E} \times \mathbf{E} \ \text{ et } \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \tag{1.50}$$

donc elle est linéaire par rapport à y, et alors c'est une forme bilinéaire symétrique.

D'après (1.35) on sait que

$$(x \ / \ x) = \|x\| \ , \ \forall x \in \mathbf{E} \ ,$$

d'où elle est définie positive et donc c'est une forme bilinaire symétrique définie positive, i.e. un produit scalaire.

Pour le cas complexe, remarquons aussi que la forme (1.36) est hermitienne i.e.

$$(x \ / \ y) = \overline{(y \ / \ x)} \ , \ \forall (x \ , \ y) \in \mathbf{E} \times \mathbf{E} \ , \tag{1.51}$$

et qu'elle vérifie

$$i(x \ / \ y) = (x \ / \ iy) = (-ix \ / \ y), \ \forall (x \ , \ y) \in \mathbf{E} \times \mathbf{E}. \tag{1.52}$$

Alors par les mêmes arguments que dans le cas réel on peut démontrer que la forme

(1.36) est $\mathbb{R}-$linéaire par rapport à y, i.e. qu'elle vérifie pour tout $x \in \mathbf{E}$

$$(x \ / \ y_1 + y_2) = (x \ / \ y_1) + (x \ / \ y_2) \ \ , \ \ \lambda(x \ / \ y) = (x \ / \ \lambda y), \ \forall \ y, y_1, \ y_2 \in \mathbf{E} \ \text{ et } \forall \lambda \in \mathbb{R}. \tag{1.53}$$

Ainsi pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, et d'après (1.52) on peut voir que pour tout $x \in \mathbf{E}$ on a

$$\begin{aligned}\lambda(x \ / \ y) &= (\lambda_1 + i\lambda_2)(x \ / \ y) = \lambda_1(x \ / \ y) + \lambda_2 i(x \ / \ y), \\ &= (x \ / \ \lambda_1 y) + \lambda_2(x \ / \ iy) = (x \ / \ \lambda_1 y) + (x \ / \ \lambda_2 iy) \ , \\ &= (x \ / \ (\lambda_1 + \ i\lambda_2)\, y) = (x \ / \ \lambda y) \ \ , \ \forall \ y \in \mathbf{E}.\end{aligned}$$

C'est-à-dire que la forme (1.36) est linéaire par rapport à y et puisque elle est hermitienne, on peut facilement voir qu'elle est antilinéaire par rapport à x, et donc c'est une forme sesquilinéaire hermitienne.

Comme

$$(x \ / \ x) = \|x\| \ \ , \ \forall x \in \mathbf{E} \ ,$$

alors elle est définie positive et donc elle définit un produit scalaire.

Définition $1-14$

Deux vecteurs x, y d'un espace vectoriel $\mathbf{E}$ muni d'un produit scalaire sont dit orthogonaux si $(x \ / \ y) = 0$.

Théorème $1-8$ (*Théorème de Pythagore*)

Soient x et y deux vecteurs d'un espace préhilbertien $\mathbf{E}$. Si x et y sont orthogonaux alors on a

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 . \tag{1.54}$$

Démonstration

C'est une conséquence immédiate de l'identité

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \ (x \ / \ y) + \ (y \ / \ x).$$

Proposition 1 − 5

Soit $\mathbf{E}$ un espace préhilbertien. Les applications suivantes, définies par

$$(x\ ,\ y) \in \mathbf{E} \times \mathbf{E} \mapsto (x\ /\ y) \in \mathbb{C}\ \ ; \tag{1.55}$$

$$x \in \mathbf{E} \mapsto (x\ /\ y) \in \mathbb{C}\ \ (\forall y \in \mathbf{E}) \quad \text{et} \qquad y \in \mathbf{E} \mapsto (x\ /\ y) \in \mathbb{C}\ (\forall x \in \mathbf{E}). \tag{1.56}$$

sont continues.

Démonstration

Il suffit de remarquer que

$$(x\ /\ y) - (x_0\ /\ y_0) = (x\ - x_0\ /\ y - y_0) + (x - x_0\ /\ y_0) + (x_0\ /\ y - y_0) \tag{1.57}$$

alors on peut déduire directement de l'inégalité de $Cauchy - Schwarz$ (1.23) que

$$|(x\ /\ y) - (x_0\ /\ y_0)| \leq \|x\ - x_0\|\ \|\ y - y_0\| + \|x - x_0\|\ \|\ y_0\| + \|x_0\|\ \ \|y - y_0\| \tag{1.58}$$

d'où découle la continuité de chacune des trois applications ci-dessus.

Définition 1 − 15

Soit $\mathbf{M}$ un sous-ensemble d'un espace préhilbertien $\mathbf{E}$. On appelle l'orthogonal de $\mathbf{M}$, noté $\mathbf{M}^{\perp}$, le sous-ensemble de $\mathbf{E}$ donné par

$$\mathbf{M}^{\perp} = \{y \in \mathbf{E}\quad /\quad (y\ /\ x) = 0\ ,\ \forall x \in \mathbf{M}\}\,. \tag{1.59}$$

Proposition 1 − 6

L'orthogonal $\mathbf{M}^{\perp}$ d'un sous-ensemble $\mathbf{M}$ d'un espace préhilbertien $\mathbf{E}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathbf{E}$.

Démonstration

On peut facilement vérifier que $\mathbf{M}^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{E}$. Montrons qu'il est fermé dans $\mathbf{E}$.

En effet, soit $\{x_n\}$ une suite d'éléments de $\mathbf{M}^{\perp}$ qui converge vers x. Par définition de $\mathbf{M}^{\perp}$, on sait que $\forall y \in \mathbf{M}$ on a $(x_n \ / \ y) = 0$ et puisque le produit scalaire est continu en ses arguments, on en déduit alors que

$$(x \ / \ y) = \lim_{n \to +\infty} (x_n \ / \ y) = 0$$

et donc

$$(x \ / \ y) = 0 \ , \ \forall y \in \mathbf{M} \ \Rightarrow \ x \in \mathbf{M}^{\perp}.$$

Définition 1 – 16

Un espace préhilbertien complet pour la norme induite est appelé espace de *Hilbert*. Les espaces de *Hilbert* sont habituellement notés par la lettre **H**.

Exemples

1) L'espace vectoriel $\mathbb{C}^m$ (resp. $\mathbb{R}^m$) muni de la norme induite du produit scalaire (1.20)

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{m} |x_i|^2 \quad , \tag{1.60}$$

est un espace de *Hilbert*.

2) L'espace vectoriel $L^2(\Omega)$ muni de la norme induite du produit scalaire (1.21)

$$\|x\|^2 = \int_{\Omega} |x(t)|^2 \, dt \quad , \tag{1.61}$$

est un espace de *Hilbert*.

1.2.1 La projection orthogonale

Dans les applications on veut souvent résoudre un prpblème d'optimisation qui se pose de la manière suivante : " Soit **M** une partie d'un espace vectoriel normé **X** et x un élément de **X**. On veut trouver un élément y de **M** qui approche le mieux possible x ".

En dimension finie, si **M** est un fermé, ce problème a toujours une solution qui n'est pas nécessairement unique. Mais en dimension infinie, ce problème peut ne pas avoir de solution.

On va montrer que si $\mathbf{M}$ est un convexe fermé d'un espace préhilbertien le problème d'optimisation admet une unique solution.

Théorème $1-9$

Soit $\mathbf{E}$ un espace préhilbertien et $\mathbf{M}$ un sous-ensemble convexe et complet de $\mathbf{E}$.Pour tout élément $x \in \mathbf{E}$ il existe un et un seul élément $y \in \mathbf{M}$ situé à une distance minimale de x :

$$\|x-y\| \leq \|x-z\| \ , \ \forall z \in \mathbf{M}. \tag{1.62}$$

Théorème $1-10$

Soit $\mathbf{E}$ un espace préhilbertien et $\mathbf{F}$ un sous-espace vectoriel complet de $\mathbf{E}$. Soit y l'élément de $\mathbf{F}$ à plus courte distance de x, alors y est le seul élément de $\mathbf{F}$ tel que $x-y$ soit orthogonal à $\mathbf{F}$, et on dit que y est la projection orthogonale de x sur $\mathbf{F}$.

Si on note cet élément y par $\mathbf{P_F}x$ i.e. $y=\mathbf{P_F}x$, on a donc

$$y=\mathbf{P_F}x \ \Leftrightarrow \ (x-y \ / \ z)=0 \ , \ \forall z \in \mathbf{F} \quad \Leftrightarrow \quad (x \ / \ z)=(y \ / \ z) \ , \ \forall z \in \mathbf{F}. \tag{1.63}$$

On dira alors que l'application $\mathbf{P_F}$ de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{E}$ est la projection orthogonale sur $\mathbf{F}$.

Corollaire $1-1$

Soit $\mathbf{H}$ un espace de *Hilbert* et $\mathbf{F}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbf{H}$. Pour que $\mathbf{F}$ soit dense dans $\mathbf{H}$, il faut et il suffit que l'orthogonal de $\mathbf{F}$ soit réduit au vecteur nul i.e. $\mathbf{F}^{\perp}=\{0\}$.

Proposition $1-7$

Soit $\mathbf{E}$ un espace préhilbertien et $\mathbf{F}$ un sous-espace vectoriel complet de $\mathbf{E}$ (non réduit au vecteur nul). Alors on a

(i) $\mathbf{E}=\mathbf{F}\oplus\mathbf{F}^{\perp}$ et $\mathbf{P_F}$ est la projection sur $\mathbf{F}$ parallélement à $\mathbf{F}^{\perp}$.

(ii) L'opérateur de projection orthogonale

$$\mathbf{P_F} : \ x \in \mathbf{E} \ \mapsto \mathbf{P_F} x \in \mathbf{F} \ , \tag{1.64}$$

est continu et vérifie

$$\|\mathbf{P_F} x\| \leq \|x\| \quad , \quad \forall x \in \mathbf{E}. \tag{1.65}$$

(iii) $\left(\mathbf{F}^{\perp}\right)^{\perp} = \mathbf{F}$.

I-3 OPERATEURS LINEAIRES CONTINUS

Soient E et F deux espaces vectoriels normés (réels ou complexes) et A une application de E dans F.

Définition 3-1 :

1) On dit que A est additif si $A(x+y) = Ax + Ay$ pour tout $(x, y) \in E \times E$

2) On dit que A est homogène si $A(\lambda x) = \lambda Ax$ pour tout λ.

3) On dit que A est linéaire si A est additif et homogène

On notera :

$\mathcal{L}(E,F) = \{$ Applications linéaires continues de E dans $F\}$

$\mathcal{L}(E) = \{$ " " de E dans lui même$\}$

$\mathcal{L}(E,\mathbb{K}) = \{$ Formes linéaires continues de E dans $\mathbb{K}\} = E^*$

où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E^* est appelé dual de E.

Rappelons une propriété caractéristique des applications continues définies sur un espace métrique

+ Propriété caractéristique de la continuité :

Une application est continue si quelle que soit la suite $\{x_n\}$ convergente vers x alors la suite $\{Ax_n\}$ converge vers Ax.

+ Propriétés caractéristiques d'une application linéaire continue :

Soient E et F deux espaces normés et A une application linéaire de E dans F. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) A est une application continue au point 0,

(ii) A est une application continue en tout point,

(iii) l'ensemble des nombres $\|Ax\|$ calculés pour $\|x\| \leq 1$ est borné supérieurement.

Remarque 3.1 :

si E est de dimension infinie il existe des applications linéaires qui ne sont pas continues.

Définition 3.2 :

Soit A une application linéaire continue de E dans F. La borne supérieure de l'ensemble des nombres $\|Ax\|$ calculés pour $\|x\| \leq 1$ est appelée la norme de A, notée $\|A\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ ou simplement $\|A\|$ quand il n'y a pas de confusion avec les normes de E et F.

L'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ admet effectivement une structure d'espace vectoriel normé avec la norme défini par :

$$A \in \mathcal{L}(E,F) \mapsto \|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$$

Cette norme peut se définir encore par les relations :

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| .$$

Proposition 3.1

Si F est un espace de Banach alors $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace de Banach.

Théorème 3-1 : (Théorème de prolongement des applications linéaires)

Soient E un espace normé et F un espace de Banach, A une application linéaire continue du sous-espace $D(A) \subset E$ dans F : tq $\overline{D(A)} = E$. alors il existe un opérateur linéaire continu $\hat{A}$ de E dans F qui vérifie :

$$\forall x \in D(A) : \hat{A}x = Ax \text{ et } \|\hat{A}\| = \|A\| .$$