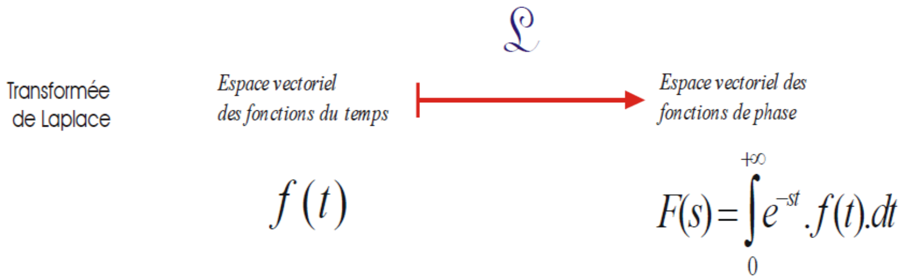
Chapitre 02 : Transformation de Laplace-Transformation de Fourier

I. Transformation de Laplace :

1. Définitions et conditions d'existence :

- **Définition 01 :** une fonction f est dite d'ordre exponentiel, si on peut trouver une constante réelle M et $\alpha > 0$ *tels que* $|f(t)| < Me^{\alpha t}, \forall t > T$.
- **Définition 02 :** Soit $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ continue par morceaux. On appelle transformée de Laplace de la fonction f, la fonction : $F(p) = \mathcal{L}\big(f(t)\big)(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt; p \in \mathbb{C}$.



- **Conditions d'existence :** F(p) est définie par une intégrale généralisée, donc il faut que :
  - F soit continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$.
  - $\exists \beta \in \,]0,1[$ *tel que* $\lim_{t\to 0} t^{\beta}|f(t)| = 0$
  - La fonction f est d'ordre exponentiel : $|f(t)e^{-pt}| \leq Me^{-(Rep-\alpha)t}$ or $\int_0^{+\infty} e^{-(Rep-\alpha)t}dt$ converge pour $Re(p) > \alpha$.
- **Remarques :** Certaines fonctions ne possèdent pas de transformée de Laplace, par exemple la fonction $f(t) = \frac{1}{t}$ qui ne respecte pas la deuxième condition d'éxistence, ou $f(t) = e^{t^2}$ qui n'est pas d'ordre exponentielle.
- **Problème :** Comment déterminer le meilleur α pour que l'intégrale converge ?. On admet le théorème suivant :

Théorème : Soit $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ fonction continue.

1) $\exists!\, a \in \overline{\mathbb{R}}, Re(p) > a \Longrightarrow \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$ converge simplement

   $Re(p) < a \Longrightarrow \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$ diverge.
2) $\exists!\, b \in \overline{\mathbb{R}}, Re(p) > b \Longrightarrow \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$ converge absolument

   $Re(p) < b \Longrightarrow \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$ ne converge pas absolument.

- **Exemples :**

a) Soit la fonction de Heaviside : $U(t) = \begin{cases} 1 \; si \; t \geq 0 \\ 0 \; si \; t < 0 \end{cases}$

$$\mathcal{L}\big(U(t)\big)(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\,dt = \frac{1}{p}, \qquad si\; Re(p) > 0.$$

b) Soit $f(t) = U(t)e^{\alpha t} = \begin{cases} e^{\alpha t} \; si \; t \geq 0 \\ 0 \; si \; t < 0 \end{cases}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$F(p) = \mathcal{L}(f(t))(p) = \int_0^{+\infty} e^{\alpha t}\, e^{-pt}\,dt = \frac{1}{p-\alpha}, \qquad si\; Re(p) > Re(\alpha).$$

c) Soit $f(t) = \begin{cases} t^{\alpha} \; si \; t > 0 \\ 0 \; si \; t \leq 0 \end{cases}$ $avec\; \alpha > -1$

$$F(p) = \mathcal{L}\big(f(t)\big)(p)$$
$$= \int_0^{+\infty} t^{\alpha}\, e^{-pt}\,dt = \left\langle \begin{matrix} u = pt \\ du = pdt \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{p^{\alpha+1}}\int_0^{+\infty} u^{\alpha} e^{-u} du = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}, Re(p) > 0.$$

2. Propriétés :

a. Linéarité : Soient $f, g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ deux fonctions admettant des transformées de Laplace F(p) et G(p), et soient $\alpha \; et \; \beta$ deux réels ; alors

$$\mathcal{L}(\alpha f + \beta g)(p) = \alpha\mathcal{L}(f)(p) + \beta\mathcal{L}(g)(p).$$

Exemple : Grace à cette propriété, on peut déterminer la transformée de sinus et cosinus :

$$\cos(at) = \frac{e^{iat}+e^{-iat}}{2} \Longrightarrow \mathcal{L}(\cos(at))(p) = \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}(e^{iat}) + \mathcal{L}(e^{-iat})\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-ia} + \frac{1}{p+ia}\right]$$

d'où $\mathcal{L}(\cos(at))(p) = \frac{p}{p^2+a^2}$

Et

$$\sin(at) = \frac{e^{iat}-e^{-iat}}{2i} \Longrightarrow \mathcal{L}(\sin(at))(p) = \frac{1}{2i}\left[\mathcal{L}(e^{iat}) - \mathcal{L}(e^{-iat})\right] = \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{p-ia} - \frac{1}{p+ia}\right]$$

d'où $\mathcal{L}(\sin(at))(p) = \frac{a}{p^2+a^2}$

b. Transformée d'une translation : Soit $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ une fonction admettant une transformée de Laplace F(p). On note

$$f_a(t) = \begin{cases} f(t-a) si \; t \geq a \\ 0 \; si \; t < a \end{cases}$$

Alors

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}(f_a)(p) = \int_0^{+\infty} f(t-a)\, e^{-pt}\,dt = \left\langle \begin{matrix} u = t-a \\ du = dt \end{matrix} \right\rangle = e^{-ap}F(p)$$

c. Transformée d'une homothétie : Soit $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ une fonction admettant une transformée de Laplace F(p), et soit $k > 0$.

$$\mathcal{L}\big(f(kt)\big)(p) = \int_0^{+\infty} f(kt)\, e^{-pt}\,dt = \left\langle \begin{matrix} u = kt \\ du = kdt \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{k}\mathcal{L}(f(t)\left(\frac{p}{k}\right) = \frac{1}{k}F(\frac{p}{k})$$

d. Transformée d'une dérivée : Soit $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ une fonction continument dérivable et admettant une transformée de Laplace F(p),

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}\big(f'(t)\big)(p) = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt = \left\langle \begin{matrix} u'(t) = f'(t) & u(t) = f(t) \\ v(t) = e^{-pt} & v'(t) = -pe^{-pt} \end{matrix} \right\rangle$$
$$= pF(p) - \lim_{t\to 0^+} f(t) = pF(p) - f(0^+)$$

Proposition : Soit $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ une fonction vérifiant :

- $f \in C^n(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$
- $\exists M > 0 \; et \; a \; réel \; tel \; que \; \forall k \leq n \; on \; a \; \left|f^{(k)}(t)\right| \leq Me^{at}$, alors

$$\mathcal{L}\left(f^{(n)}(t)\right)(p) = p^n F(p) - \sum_{k=1}^{n} p^{k-1} f^{(n-k)}(0^+)$$

e. Transformée de l'intégrale $\int_0^t f(u)du = h(t)$:

On a $h'(t) = f(t)$, d'où :

$$F(p) = \mathcal{L}\big(h'(t)\big)(p) = pH(p) - ph(0^+)$$

mais $h(0) = 0$, donc

$$H(p) = \frac{F(p)}{p}$$

Plus généralement :

$$\mathcal{L}(\underbrace{\int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t f(u)du)}_{n \; fois} = \frac{F(p)}{p^n}.$$

Théorème de la valeur initiale et de la valeur finale : Soit f une fonction admettant une transformée de Laplace, alors :

- $\lim_{p \to +\infty} F(p) = 0$
- $\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{p \to 0} pF(p)$
- $\lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{p \to +\infty} pF(p)$

  Si les limites envisagées existent.

Preuve :

- ✓ Puisque f admet une transformée de Laplace, et d'après les conditions d'éxistence, l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$ converge normalement. Donc (et d'après le théorème de continuité des intégrales généralisées dépendant d'un paramètre) on a

$$\lim_{p \to +\infty} \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} \lim_{p \to +\infty} f(t)e^{-pt}\,dt = 0$$

- ✓ On a

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}\big(f'(t)\big)(p) = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt = pF(p) - f(0^+)$$

En passant à la limite, on peut écrire :

$$\lim_{p \to 0} \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt = \lim_{p \to 0}[pF(p) - f(0^+)]$$

Puisque f' admet une transformée de Laplace, et d'après les conditions d'éxistence, l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt$ converge normalement. Donc (et d'après le théorème de continuité des intégrales généralisées dépendant d'un paramètre) on a

$$\lim_{p\to 0}\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty}\lim_{p\to 0} f'(t)e^{-pt}\,dt = \lim_{p\to 0}[pF(p) - f(0^+)]$$

Soit $\int_0^{+\infty} f'(t)dt = \lim_{p\to 0}[pF(p) - f(0^+)]$

Ou encore $\lim_{t\to+\infty} f(t) - \lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{p\to 0}[pF(p) - f(0^+)]$

D'où le second résultat.

- ✓ En utilisant le même raisonnement :

$$\lim_{p\to+\infty}\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt = \lim_{p\to+\infty}[pF(p) - f(0^+)]$$

Ou encore

$$\int_0^{+\infty}\lim_{p\to+\infty} f'(t)e^{-pt}dt = 0 = \lim_{p\to+\infty}[pF(p) - f(0^+)]$$

D'où

$$\lim_{p\to+\infty} pF(p) = f(0^+)$$

3. Transformée inverse :

La transformée de Laplace étant un opérateur bijectif, sa bijection inverse existe. Elle est unique et on l'appelle original de F ; on a alors $\mathcal{L}^{-1}\big(F(p)\big) = f(t)$. La définition mathématique de la transformée de Laplace inverse se base sur une intégrale de contour dans le plan complexe, l'utilisation de cette définition exige une connaissance de l'Analyse complexe.

En pratique :

- ➢ On détermine la transformée inverse de F(p) directement de la table.
- ➢ Il faut d'abord exprimer ou décomposer F(p) en une somme de termes dont les transformées inverses sont dans la table.
- ➢ Utiliser la table conjointement avec une ou plusieurs propriétés.
- ➢ S'il y a des retards, les traiter en premier,séparément.
- ➢ Pour des fractions rationnelles, on décompose dans l'ensemble des réels en éléments simples. Pour les éléments simples de première espèce se traitent facilement. Pour ceux de seconde espèce, on doit mettre leur dénominateur sous forme canonique, pour retrouver des originaux en sinus ou en cosinus.

- **Exemples :**

1) $F(p) = \frac{3p+7}{p^2-2p-3} = \frac{4}{p-3} - \frac{1}{p+1}$ $donc\ f(t) = (4e^{3t} - e^{-t})U(t)$
2) $F(p) = \frac{e^{-2p}}{p+1}$ $donc\ f(t) = e^{-(t-2)}U(t-2)$
3) $F(p) = \frac{3p+1}{(p-1)(p^2+1)} = \frac{2}{p-1} + \frac{-2p+1}{p^2+1}$ $donc\ f(t) = 2e^t - 2\cos t + \sin t.$

4. Applications :

A. Résolution des équations différentielles :

Soit donnée une équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(t)$$

On demande de trouver la solution de cette équation $y = y(t) pour\ t \geq 0$ et vérifiant les conditions initiales : $y(0) = y_0, y'(0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$. On cherche la transformée de Laplace des deux membres de l'équation :

$$\mathcal{L}\left(a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y\right) = \mathcal{L}(f(t))$$

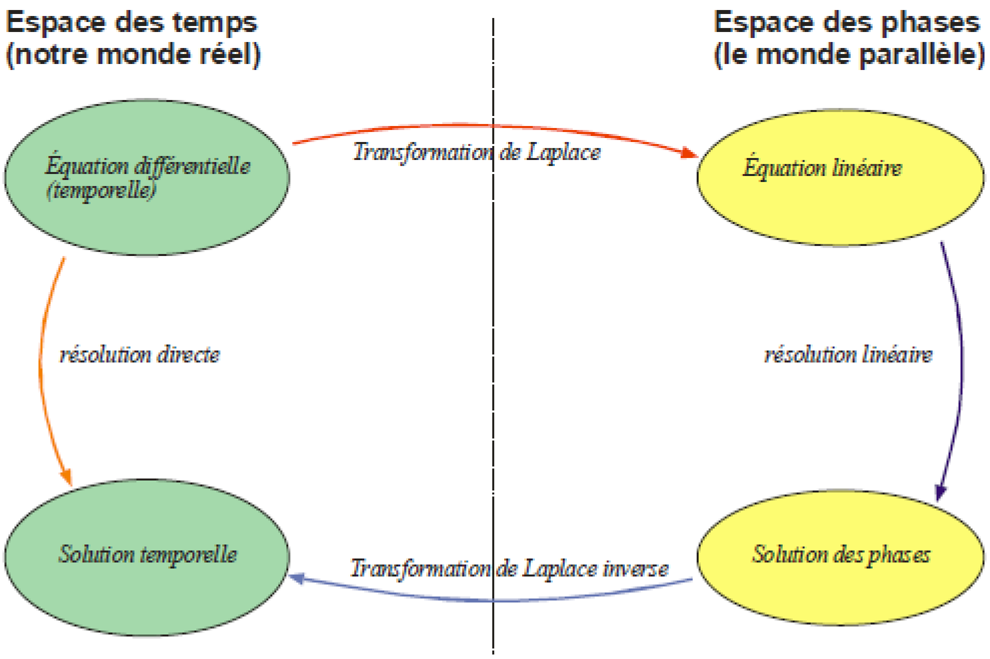
En utilisant les propriétés de linéarité

$$a_0 \mathcal{L}(y^{(n)})(p) + a_1 \mathcal{L}(y^{(n-1)})(p) + \cdots + a_{n-1} \mathcal{L}(y')(p) + a_n \mathcal{L}(y)(p) = \mathcal{L}(f(t))(p)$$

Sachant que

$$\mathcal{L}\left(f^{(k)}(t)\right)(p) = p^k F(p) - \sum_{l=1}^{k} p^{l-1} f^{(k-l)}(0^+)$$

La transformée de Laplace permet de convertir une équation différentielle en une équation algébrique, dont la solution est la transformée de la solution $y(t)$ de notre équation différentielle . Pour finir, on utilise la transformée de Laplace inverse pour déterminer la solution.



- **Equations différentielles ordinaires :**

Exemple : Résoudre $x"(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 4e^{3t}, avec\ x(0) = 4, x'(0) = 9$. On a

$$\left.\begin{array}{r} \mathcal{L}(x) = X \\ \mathcal{L}(x') = pX - x(0) \\ \mathcal{L}'x") = p^2 X - px(0) - x'(0) \end{array}\right\} \Rightarrow l'équation\ devient\ (p^2 - 3p + 2)X = \frac{4}{p-3} + 4p - 3$$

D'où $X = \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p-2} + \frac{2}{p-3} = \mathcal{L}(e^t + e^{2t} + 2e^{3t})(p)$

- **Système différentiel :**

Exemple : Soit le système différentiel à résoudre :

$$(S)\begin{cases} x' - y' + x - y = 2 + 3e^{2t} \\ x' + 2y' - 3x = -3 + 2e^{2t} \\ x(0) = 4, y(0) = 1 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} pX - 4 - pY + 1 + X - Y = \frac{2}{p} + \frac{3}{p-2} \\ pX - 4 + 2pY - 2 - 3X = \frac{-3}{p} + \frac{2}{p-2} \end{cases}$$

D'où : $\begin{cases} X = \frac{1}{p} + \frac{1}{p-1} + \frac{2}{p-2} \\ Y = -\frac{1}{p} + \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p-2} \end{cases}$ et donc $\begin{cases} x(t) = 1 + e^{t} + 2e^{2t} \\ y(t) = -1 + e^{t} + e^{2t} \end{cases}$

B. Résolution des équations aux dérivées partielles :

Si on suppose que la fonction $u(x,t)$admet une transformée de Laplace lorsqu'elle est considérée comme fonction de t et que

$U(x,p) = \int_0^{+\infty} u(x,t)e^{-pt}dt$ converge normalement pour p> p_0, on aura

$$\begin{cases} \mathcal{L}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = pU(x,p) - u(x,0) \\ \mathcal{L}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = p^2U(x,p) - pu(x,0) - \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) \\ \mathcal{L}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{dU}{dx} \ et \ \mathcal{L}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \frac{d^2U}{dx^2} \end{cases}$$

En utilisant la transformée de Laplace, une équation aux dérivées partielles se transforme en une équation différentielle ordinaire. On choisit de transformer le problème par rapport à l'une des deux variables, selon les conditions initiales et les données.

Exemple : soit le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - 4u(x,t) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = 6sinx - 4sin2x \end{cases}$$

En utilisant la transformée de Laplace par rapport à la variable t, on obtient :

$$\frac{d^2U}{dx^2}(x,p) - (p+4)U(x,p) = -6sinx + 4sin2x$$

qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 dont la solution générale est

$$U_0(x,p) = c_1 e^{\sqrt{p+4}x} + c_2 e^{-\sqrt{4+p}x}$$

Et la solution particulière

$$U_1(x,p) = \frac{6}{5+p} sinx - \frac{4}{p+8} sin2x.$$

Mais d'après les conditions aux limites

$$c_1 = c_2 = 0, d'\text{où}\ u(x,t) = 6e^{-5t}\ sinx - 4e^{-8t} sin2x.$$

C. Calcul d'intégrales :

Théorème : Soit f une fonction admettant une transformée de Laplace, alors :

- Si l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est convergente alors $\int_0^{+\infty} f(t)dt = \lim_{p\to 0} F(p)$
- Si l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ est convergente alors $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} F(u)du$
- Si l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n f(t)dt$ est convergente alors $\int_0^{+\infty} t^n f(t)dt = \lim_{p\to 0}(-1)^n F^{(n)}(p)$

Exemple : Evaluer l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{sint}{t} dt$ (intégrale de Dirichlet).

I est une intégrale généralisée de première espèce (0 n'est pas singulier) convergente d'après le critère d'Abel. D'après le théorème précédent :

$$I = \int_0^{+\infty} \mathcal{L}(sint)(u)du = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} du = \frac{\pi}{2}$$

Table des transformées de Laplace

$f(t)$	$F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$
$U(t)$	$\frac{1}{p}$
$t^n U(t), n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$t^\alpha\ U(t), \alpha > -1$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$
$e^{\alpha t}U(t)$	$\frac{1}{p-\alpha}$
$\sin(at)\ U(t)$	$\frac{a}{p^2+a^2}$
$\cos(at)\ U(t)$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
$\mathrm{sh}(at)\ U(t)$	$\frac{a}{p^2-a^2}$
$\mathrm{ch}(at)\ U(t)$	$\frac{p}{p^2-a^2}$
Propriétés	
$f(t-a)$	$e^{-ap}F(p)$
$e^{-at}f(t)$	$F(p+a)$
$f(at)$	$\frac{1}{a}F(\frac{p}{a})$
$\int_0^t f(s)ds$	$\frac{F(p)}{p}$
$f'(t)$	$pF(p)-f(0^+)$
$f^{(n)}(t)$	$p^nF(p)-\sum_{k=1}^{n} p^{k-1}f^{(n-k)}(0^+)$
$t^n\ f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(p)$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^{+\infty} F(u)du$
$f\ de\ période\ T$	$\frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^T e^{-pt}f(t)dt$
$(f*g)(t)=\int_0^t f(s)g(t-s)ds$	$F(p)G(p)$
$Si\ \lim_{t\to 0\ ou +\infty} f(t)\ existe \Rightarrow$	$\lim_{t\to+\infty} f(t)=\lim_{p\to 0} pF(p)$ $\lim_{t\to 0} f(t)=\lim_{p\to+\infty} pF(p)$

II. Transformation de Fourier :

En Analyse, la transformation de Fourier est un analogue de la théorie des séries de Fourier pour les fonctions non périodiques.

1. Définitions :

A. Transformée de Fourier :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction absolument intégrable sur l'ensemble des réels. On définit la transformée de Fourier de f la fonction notée

$$\mathcal{F}(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

Par:

$$\mathcal{F}\big(f(t)\big)(\alpha) = \hat{F}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt.$$

Exemples :

✓ Calculer la transformée de Fourier de la fonction (dite signal porte) définie par

$$\pi(t) = \begin{cases} 1 \; si \; t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ 0 \; si \; non \end{cases}$$

On a

$$\mathcal{F}\big(\pi(t)\big)(\alpha) = \hat{F}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \pi(t) e^{-i\alpha t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-i\alpha t} dt$$

D'où

$$\mathcal{F}\big(\pi(t)\big)(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(\frac{\alpha}{2})}{\frac{\alpha}{2}}$$

✓ Calculer la transformée de Fourier de la fonction

$$f(t) = e^{-|t|}$$

On a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\big(f(t)\big)(\alpha) = \hat{F}(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} e^{-i\alpha t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{0} e^{t} e^{-i\alpha t} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-t} e^{-i\alpha t} dt \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\lim_{a \to -\infty} \left[\frac{e^{t(1-i\alpha)}}{1 - i\alpha} \right]_a^0 + \lim_{b \to +\infty} \left[\frac{e^{-t(1+i\alpha)}}{1 + i\alpha} \right]_0^b \right) \end{aligned}$$

D'où

$$\mathcal{F}\big(e^{-|t|}\big)(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{\alpha^2 + 1}$$

Théorème : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ absolument intégrable sur l'ensemble des réels. Alors :

- $\hat{F}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt$ est normalement convergente.
- $\hat{F}$ est bornée.
- $\lim_{\alpha \to \pm\infty} \hat{F}(\alpha) = 0$.

B. Lien avec la transformée de Laplace :

La transformée de Fourier d'une une fonction f absolument intégrable sur l'ensemble des réels est donnée par :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\big(f(t)\big)(\alpha) = & \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\alpha t}dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-i\alpha t}dt + \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-i\alpha t}dt) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\int_{0}^{+\infty} f(-t)e^{i\alpha t}dt + \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-i\alpha t}dt)\end{aligned}$$

D'où

$$\mathcal{F}\big(f(t)\big)(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\mathcal{L}\big(f(-t)\big)(-i\alpha) + \mathcal{L}\big(f(t)\big)(i\alpha)\right]$$

A partir de ce lien, on peut dire que la transformation de Laplace est une généralisation de la transformation de Fourier. En plus, et puisque la transformée de Laplace est un opérateur linéaire et bijectif, on déduit que la transformée de Fourier l'est aussi.

C. Transformée de Fourier inverse :

La transformée inverse d'une fonction $\hat{F}(\alpha)$ est définie par la formule de réciprocité de Fourier :

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\hat{F}(\alpha)\right)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{F}(\alpha)e^{i\alpha t}d\alpha$$

$$= \begin{cases} f(t) si\ f\ est\ continue\ en\ t \\ \dfrac{f(t+0)+f(t-0)}{2}\quad si\ non \end{cases}$$

(On suppose que$f(t+0) et\ f(t-0) existent$)

D. « Sinus et Cosinus -transformées de Fourier:

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ absolument intégrable sur l'ensemble des réels.

- On appelle <u>Sinus-transformée de Fourier</u> de la fonction$f$, la fonction définie par :

$$\hat{F}_s(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(t) sin\alpha t\ dt$$

  Sa transformée inverse (dite inverse de sinus-transformée) est donnée par

$$f(t) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} \hat{F}_s(\alpha) sin\alpha t\ d\alpha.$$

- On appelle <u>Cosinus-transformée de Fourier</u> de , la fonction définie par :

$$\hat{F}_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(t) cos\alpha t\ dt$$

  Sa transformée inverse (dite inverse de sinus-transformée) est donnée par

$$f(t) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} \hat{F}_c(\alpha)\ cos\alpha t\ d\alpha.$$

- Si f est une fonction paire alors
$$\hat{F}(\alpha) = \hat{F}_c(\alpha)$$

En effet, on a

$$\hat{F}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\alpha t}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\cos(\alpha t) - \mathrm{i}\sin(\alpha t))\, dt$$

Comme f est absolument intégrable, les intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\alpha t)\,\mathrm{dt} \quad et \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\alpha t)\,\mathrm{dt}$$

Sont absolument convergentes. Or la fonction $t \longmapsto f(t)\cos(\alpha t)$ est paire, et la fonction $t \longmapsto f(t)\sin(\alpha t)$ est impaire, il s'en suit alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\alpha t)\,\mathrm{dt} = 2\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos(\alpha t)\,\mathrm{dt} \ et \ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\alpha t)\,\mathrm{dt} = 0$$

D'où le résultat.

- Si f est une fonction impaire alors
$$\hat{F}(\alpha) = -i\hat{F}_s(\alpha)$$

Dans ce cas la fonction $t \longmapsto f(t)\cos(\alpha t)$ est impaire, et la fonction $t \longmapsto f(t)\sin(\alpha t)$ est paire, il s'en suit alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\alpha t)\,\mathrm{dt} = 2\int_{0}^{+\infty} f(t)\sin(\alpha t)\,\mathrm{dt} \ et \ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\alpha t)\,\mathrm{dt} = 0$$

2. Propriétés :

(Voir le tableau)

3. Formules de Parseval et de Plancherel :

Théorème : Soient $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ absolument intégrables et continues. Si on note $\hat{F}(\alpha) = \mathcal{F}\big(f(t)\big)(\alpha) et\ \hat{G}(\alpha) = \mathcal{F}(g(t)(\alpha)$ alors :

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{F}(\alpha)\overline{\hat{G}(\alpha)}d\alpha$. (Formule de Plancherel)
- $\int_{0}^{+\infty} f(t)g(t)dt = \int_{0}^{+\infty} \hat{F}_c(\alpha)\,\hat{G}_c(\alpha)d\alpha = \int_{0}^{+\infty} \hat{F}_s(\alpha)\hat{G}_s(\alpha)d\alpha$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\hat{F}(\alpha)\right|^2 d\alpha$ (Formule de Parseval)
- $\int_{0}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{0}^{+\infty} \left|\hat{F}_c(\alpha)\right|^2 d\alpha = \int_{0}^{+\infty} \hat{F}_s(\alpha)^2\, d\alpha$

4. Applications :

A. Calcul des intégrales :

Exemple 01 : Calculer la transformée de Fourier de la fonction $f(t) = e^{-|t|}$, en déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{cosat}{1+t^2} dt$.

Comme f est paire,

$$\hat{F}(\alpha) = \hat{F}_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} cos\alpha t \; e^{-t} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathcal{L}(cos\alpha t)(1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\alpha^2}.$$

D'après la formule de réciprocité, on a $f(t) = e^{-|t|} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \hat{F}_c(\alpha) cos\alpha t \; d\alpha = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{cos\alpha t}{1+\alpha^2} d\alpha.$

D'où $\int_0^{+\infty} \frac{cosat}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2} e^{-|a|}$.

Exemple 02 : Calculer la transformée de Fourier sinus de $f(t) = e^{-t}, t \geq 0$; en déduire les valeurs des intégrales : $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{tsinxt}{1+t^2} \; dt \; et \; I_2 = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t^2}\right)^2 dt.$

$\hat{F}_s(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} sin\alpha t \; e^{-t} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha}{1+\alpha^2}$

D'où

$$f(t) = e^{-t} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \hat{F}_s(\alpha) sin\alpha t \; d\alpha = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\alpha sin\alpha t}{1+\alpha^2} d\alpha$$

Donc $I_1 = \frac{\pi}{2} e^{-t}$.

En appliquant la formule de Parseval :

$$\int_0^{+\infty} e^{-2t} dt = \int_0^{+\infty} f(t)^2 dt = \int_0^{+\infty} \hat{F}_s(\alpha)^2 d\,\alpha$$

$d'où \; I_2 = \frac{1}{2}$.

B. Résolution des problèmes aux limites :

Soit le problème à résoudre :

$$(\boldsymbol{E}) \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ |u(x,t)| \leq M \\ u(x,0) = \begin{cases} -1 \; si \; x < 0 \\ 1 \; si \; x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

D'après les conditions aux limites, on applique la transformée de Fourier par rapport à x :

- $\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\right) = \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial t^2}(\alpha,t)$(Règle de Leibnitz)
- $\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right) = -\alpha^2 \hat{U}(\alpha,t).$

Donc

$$(E) \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial t^2}(\alpha,t) - \alpha^2 \hat{U}(\alpha,t) = 0$$

Ainsi on obtient une équation différentielle ordinaire de 2^{nd} ordre en t, dont la solution générale est

$$\hat{U}(\alpha,t) = c_1(\alpha)e^{\alpha t} + c_2(\alpha)e^{-\alpha t}$$

La condition $|u(x,t)| \leq M$ implique que :

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = 0 \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} \widehat{U}(\alpha,t) = 0; alors\ c_1 = 0.$$

En plus

$$\widehat{U}(\alpha,0) = c_2(\alpha) = \mathcal{F}\big(u(x,0)\big) = -i\mathcal{F}_s(u(x,0))$$

car $u(x,0)$ est impaire. D'où

$$c_2(\alpha) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\left[\frac{-u(x,0)cos\alpha x}{\alpha}\right]_0^{+\infty} + \alpha\int_0^{+\infty} \underbrace{u'(x,0)}_{0}\frac{cos\alpha x}{\alpha}dx\right] = i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\alpha}$$

Donc $\widehat{U}(\alpha,t) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t} = -i\mathcal{F}_s\big(u(x,t)\big) \Longrightarrow u(x,t) = \frac{2}{\pi}arctg\frac{x}{t}$

Table des Transformées de Fourier

$f(t)$	$\mathcal{F}(f(t))(\alpha) = \tilde{F}(\alpha)$
$U(t)e^{-at}, a > 0$	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}(a + i\,\alpha)}$
$1\ pour - a \leq t \leq a\ et\ 0\ autrement$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\sin(\alpha a)}{\alpha}$
$\delta(t)(fonction\ de\ Dirac)$	1
$\delta(t-a)$	$e^{-ia\alpha}$
Propriétés	
$f(at)$	$\dfrac{1}{\lvert a\rvert}\,\tilde{F}\left(\dfrac{\alpha}{a}\right)$
$e^{iat}\,f(t)$	$\tilde{F}(\alpha - a)$
$f(t-a)$	$e^{-ia\alpha}\,\tilde{F}(\alpha)$
$f'(t), avec\ \lim\limits_{t\to\mp\infty} f(t) = 0$	$i\,\alpha\,\tilde{F}(\alpha)$
$f''(t), tq\ \lim\limits_{t\to\mp\infty} f(t) = 0$ $et\ \lim\limits_{t\to\mp\infty} f'(t) = 0$	$-\alpha^2\,\tilde{F}(\alpha)$
$f^{(n)}(t), tq\ \lim\limits_{t\to\mp\infty} f^{(k)}(t) = 0$ $k = 1,2,\dots,n-1$	$(i\alpha)^n\tilde{F}(\alpha)$
$t\,f(t)$	$i\,\tilde{F}'(\alpha)$
$t^n\,f(t), n \geq 1$	$i^n\tilde{F}^{(n)}(\alpha)$
$\displaystyle\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$	$\dfrac{\tilde{F}(\alpha)}{i\alpha}$
$(f*g)(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$\sqrt{2\pi}\,\tilde{F}(\alpha)\tilde{G}(\alpha)$