# 1 Les transformées de Laplace.

## 1.1 Entrée en matière.

Les mathématiciens ont inventé de nombreux transformation intégrale d'une fonction, parmi lesquels nous avons vu les transformées de Fourier. Une autre transformation extrêmement utilisée est celle de Laplace. Les transformées de Laplace sont les cousins des transformées de Fourier. Leur relation est celle de la fonction exponentielle et de la fonction sinus ou cosinus. Comme vous vous souvenez, pour prendre la TF, on multiplie la fonction $f(t)$ par $\exp(i\omega t)$ et on intègre entre, notez le bien, $-\infty$ et $+\infty$. Pour les TL, on multiplie la fonction par $\exp(-st)$ et on intègre entre, cette fois, 0 et $+\infty$

$$\tilde{f}(s) = \mathrm{TL}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)\exp(-st)dt$$

Les conventions veulent que la variable conjuguées à $t$ s'appelle $\omega$ pour les TF et $s$ pour les TL. La fonction $f(t)$ est appelée l'original, et sa TL son *image*. Dans la plupart des livres que vous consulterez, l'image est noté $F(s)$, mais nous maintenons ici la convention $\tilde{f}(s)$ ou $\hat{f}(s)$. Il existe de nombreux avantages et désavantages à utiliser les TL à la place des TF. D'un point de vue pratique, toutes les deux transforment des équations différentielles linéaires en des équations algébriques. Mais il est difficile d'intégrer les conditions initiales dans les TF, tandis qu'elles s'introduisent naturellement dans les TL, comme nous en verrons des exemples plus bas. Prenons le cas d'un signal temporel $x(t)$. Pour les transformées de Fourier, ce signal a toujours existé (depuis $t = -\infty$ ) et existera toujours. Pour les Transformée de Laplace, le signal ne commence son existence qu'à un temps fini ($t = 0$).

Un autre (grand) avantage des TL est que nos exigences sur le comportement de $f(t)$ quand $t \to \infty$ sont beaucoup plus légères : comme la fonction $\exp(-st)$ décroît très rapidement à l'infini (pour $Re(s) > 0$ ), la transformée de Laplace de la plupart des fonctions usuelles existera. Voyons quelques exemples.

1. $\mathrm{TL}[1] = 1/s$
2. $\mathrm{TL}[\exp(-at)] = 1/(s+a)$
3. $\mathrm{TL}[t] = 1/s^2$. Pour le démontrer, il suffit d'effectuer une intégration par partie :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} te^{-\omega t} \quad dt = & \quad 0 + \frac{1}{s}\int_0^{+\infty} e^{-st}dt \\ = & \quad \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

4. $\mathrm{TL}[t^k] = k!/s^{k+1}$ (démontrez cette relation par récurrence.)

Le désavantage des TL est que nous perdons le concept de bases orthogonales. Nous avons vu qu'en étendant un peu notre espace de fonctions à l'espace des distributions, nous pouvions considérer les fonctions $\exp(i\omega t)$ comme une base orthogonale. Rien de tel n'existe pour les TL et les fonctions $\exp(-st)$, quoi qu'on fasse, *ne sont pas* orthogonales les uns aux autres. Avec la perte d'orthogonalité, nous perdons également la possibilité d'inverser (facilement) une transformée de Laplace et la belle symétrie entre une fonction et sa transformée.

## 1.2 Opérations sur les TL.

Les opération sur les TL sont très similaire, à un facteur $i$ près, aux opérations sur les TF. Par contre, il faut vraiment bien les maîtriser, puisque prendre la TL inverse est souvent une opération complexe (au sens propre) et qu'on préfère toujours se ramener à des expressions connues.

**Changement d'échelle.** $\mathrm{TL}[f(t/a)] = a\tilde{f}(as)$ La démonstration est triviale.

**Translation.** $\mathrm{TL}[\exp(-at)f(t)] = \tilde{f}(s+a)$ Multiplier l'originale par une exponentielle revient à translater l'image. Par exemple, $\mathrm{TL}[1] = 1/s$, donc $\mathrm{TL}[\exp(-at)] = 1/(s+a)$.

**Multiplication par $t$.** Si on dérive $\tilde{f}(s)$ par rapport à $s$, nous avons $d\tilde{f}(s)/ds = -\int tf(t)\exp(-st)dt$. Donc, $\mathrm{TL}[tf(t)] = -d\tilde{f}(s)/ds$ [1] . Par exemple, comme $\mathrm{TL}[1] = 1/s$, alors $\mathrm{TL}[t] = 1/s^2$

**Dérivation.** Elle contient un élément supplémentaire, et c'est cela le grand intérêt des TL.

$$\int_0^\infty f'(t)\exp(-st)dt = f(t)\exp(-st)|_{t=0}^{t=\infty} + s\int_0^\infty f(t)\exp(-st)dt$$

Ce qui nous amène à

$$\mathrm{TL}[f'(t)] = -f(0) + s\mathrm{TL}[f(t)]$$

En généralisant cela, nous voyons que $\mathrm{TL}[f"(t)] = s^2\tilde{f}(s) - sf(0) - f'(0)$, et ainsi de suite.

**Intégration.** Il n'est pas difficile, en utilisant la règle de dérivation ci-dessus, de démontrer que

$$\mathrm{TL}[\int_0^t f(\tau)d\tau] = (1/s)\tilde{f}(s)$$

1. Vous remarquerez que nous avons souvent été négligent avec l'orthodoxie des convergences et des dérivations sous le signe somme. Mais vous pouvez démontrer qu'ici au moins, nous n'avons pas enfreint de règles ( démontrez le).

**Exemple 1.** Résolvons l'équation différentielle

$$x'(t) + \nu x(t) = \alpha t \tag{1.1}$$

avec la condition initiale $x(t = 0) = x_0$. Par la méthode classique, on résout d'abord l'équation homogène pour obtenir $x = C \exp(-\nu t)$, ensuite nous supposons que $C = C(t)$ et nous obtenons une autre équation différentielle pour $C(t)$ ; la résolution de cette dernière et finalement l'utilisation de la condition initiale nous donne la solution finale.

Prenons plutôt la TL des deux cotés de l'éq.(1.1) :

$$-x_0 + (s + \nu)\tilde{x}(s) = \frac{\alpha}{s^2}$$

Nous avions déjà, à l'exemple 3 ci-dessus, calculé la TL[$t$], et nous avons juste utilisé ce résultat. En général, les TL des fonctions les plus connues sont entreposées dans des tables et on ne fait souvent que les consulter au lieu de recalculer la TL (comme pour les tables de logarithme). En décomposant en fraction simple, nous avons

$$\frac{\nu}{s^2(s+\nu)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{\nu}\frac{1}{s} + \frac{1}{\nu}\frac{1}{s+\nu}$$

et la solution de notre équation s'écrit :

$$\tilde{x}(s) = \frac{\alpha}{\nu}\left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{\nu}\frac{1}{s} + \frac{1}{\nu}\frac{1}{s+\nu}\right] + \frac{x_0}{s+\nu} \tag{1.2}$$

Bon, nous connaissons la TL de la solution, et il faut inverser le processus pour calculer $x(t)$. Or, nous savons que l'originale de $1/s^2$ est $t$, l'originale de $1/s$ est 1 , l'originale de $1/(s + \nu)$ est $\exp(-\nu t)$ (souvenez vous de la règle de translation). Nous avons donc

$$x(t) = \frac{\alpha}{\nu}t - \frac{\alpha}{\nu^2}(1 - e^{-\nu t}) + x_0 e^{-\nu t} \tag{1.3}$$

On peut vérifier, en l'injectant directement dans l'équation (1.1) que ceci est bien la solution. Notez avec qu'elle facilité la condition initiale a été prise en compte dans la solution.

**Exemple 2.** Résoudre $x^{(3)} + 3\ddot{x} + 3\dot{x} + x = 1$ avec les conditions initiales nulles ( $x^{(n)}$ désigne la dérivée $n-$ième de $x$).

La TL nous donne $\tilde{x}(s) = 1/s(s+1)^3 = (1/s) - 1/(s+1)^3 - 1/(s+1)^2 - 1/(s+1)$. En se reportant à la table (1.1), on trouve immédiatement $x(t) = 1 - (t^2/2 + t + 1)\exp(-t)$.

## 1.3 Décomposition en fraction simple.

Comme nous avons à utiliser souvent les décompositions en fraction simple, nous allons faire un petit détour pour rappeler les grands principes.

| $f(t)$ | $\tilde{f}(s)$ |
|---|---|
| $f(t/a)$ | $af(\tilde{a}s)$ |
| $\exp(-at)f(t)$ | $\tilde{f}(s+a)$ |
| $tf(t)$ | $-\frac{d}{ds}\tilde{f}(s)$ |
| $f'(t)$ | $s\tilde{f}(s)-f(0)$ |
| $f"(t)$ | $s^2\tilde{f}(s)-sf(0)-f'(0)$ |
| $f^{(n)}(t)$ | $s^n\tilde{f}(s)-\sum_{k=1}^n s^{n-k}f^{(k-1)}(0)$ |
| $\int_0^t f(\tau)d\tau$ | $\frac{1}{s}\tilde{f}(s)$ |
| | |
| $1$ | $1/s$ |
| $t$ | $1/s^2$ |
| $\exp(-at)$ | $1/(s+a)$ |
| $\sin(at)$ ou $\cos(at)$ | $a/(s^2+a^2)$ ou $s/(s^2+a^2)$ |
| $\sinh(at)$ ou $\cosh(at)$ | $a/(s^2-a^2)$ ou $s/(s^2-a^2)$ |
| $-t\cos(at)+(1/a)\sin(at)$ | $2a^2/(s^2+a^2)^2$ |
| $1/\sqrt{t}$ | $\sqrt{\pi}/\sqrt{s}$ |
| $\sqrt{t}$ | $(\sqrt{\pi}/2)s^{-3/2}$ |
| $1/(t+1)$ | $\exp(s)\Gamma(0,s)$ |

TABLE 1.1 – Résumé des règles de manipulation des TL et un petit dictionnaire des TL élémentaires.

**Cas des racines simples.** Soit $\tilde{f}(s) = p(s)/q(s)$, où $p(s)$ et $q(s)$ sont des polynômes et qu'en plus, $q(s)$ n'a que des racines simples, c'est à dire $q(s) = (s-a_1)(s-a_2)...(s-a_n)$. Nous voulons écrire $f(s)$ comme

$$\tilde{f}(s) = \frac{A_1}{s-a_1} + \frac{A_2}{s-a_2} + ... + \frac{A_n}{s-a_n}$$

Soit $q_i(s) = q(s)/(s-a_i)$. Nous voyons que $q_i(s)$ n'a pas de zéro en $s = a_i$. Quand $s \to a_i$, le terme dominant dans $f(s)$ est

$$\tilde{f}(s) = \frac{p(s)}{q_i(s)}.\frac{1}{s-a_i} = \frac{p(a)}{q_i(a)}.\frac{1}{s-a_i} + \mathcal{O}(1)$$

d'où on déduit que $A_i = p(a_i)/q_i(a_i)$. En plus, comme $q(a_i) = 0$,

$$\lim_{s\to a_i} q_i(s) = \lim_{s\to a_i} \frac{q(s)-q(a_i)}{s-a_i} = q'(a_i)$$

quand $s \to a_i$. Nous pouvons donc écrire l'original de $\tilde{f}(s)$directement comme

$$f(t) = \sum_n \frac{p(a_n)}{q'(a_n)} \exp(a_n t)$$

où la sommation est sur les zéros de $q(s)$.

**Exemple :** $\tilde{f}(s) = (3s^2-3s+1)/(2s^3+3s^2-3s-2)$. Nous avons $p(s) = 3s^2-3s+1$ , $q(s) = 2s^3+3s^2-3s-2$ et $q'(s) = 6s^2+6s-3$. Les zéro du dénominateur sont aux $s = 1, -2, -1/2$. Comme $p(1)/q'(1) = 1/9$, $p(-2)/q'(-2) = 19/9$ et que $p(-1/2)/q'(-1/2) = -13/18$, nous avons

$$\tilde{f}(s) = \frac{1}{9}\frac{1}{s-1} + \frac{19}{9}\frac{1}{s+2} - \frac{1}{6}\frac{1}{s+1/2}$$

**Cas des racines multiples.** Soit maintenant $\tilde{f}(s) = R(s)/(s-a)^n$où $R(s)$ est un quotient de polynôme qui n'a pas de pôles en $a$. Nous voulons l'écrire sous forme de

$$\tilde{f}(s) = \frac{A_0}{(s-a)^n} + \frac{A_1}{(s-a)^{n-1}} + ... + \frac{A_{n-1}}{(s-a)} + T(s)$$

où $T(s)$ contient le développement en fractions simples autour des autres pôles. Pour déterminer les coefficients $A_i$ nous avons à nouveau à calculer le comportement de $f\tilde{(s)}$ pour $s \to a$. Comme $R(s)$ est tout ce qui a de plus régulier autour de $a$, nous pouvons le développer en série de Taylor autour de ce point :

$$R(s) = R(a) + R'(a)(s-a) + (1/2)R''(a)(s-a)^2 + ...$$

Ce qui nous donne immédiatement

$$\begin{aligned} A_0 &= R(a) \\ A_1 &= R'(a) \\ &... \end{aligned}$$

**Exemple :** Trouvons l'originale de $\tilde{f}(s) = 1/(s^2+a^2)^2$. Nous avons

$$\tilde{f}(s) = \frac{A_0}{(s-ia)^2} + \frac{A_1}{(s-ia)} + \frac{B_0}{(s+ia)^2} + \frac{B_1}{(s+ia)}$$

Nous pouvons bien sûr tout calculer, mais remarquons simplement que dans l'expression de $\tilde{f}(s)$, le changement de $s$ en $-s$ laisse ce dernier invariant. Pour avoir cette même invariance dans l'expression de $\tilde{f}(s)$ une fois décomposée en fraction simple, nous devons avoir $B_0 = A_0$ et $B_1 = -A_1$. Or, d'après ce qu'on vient de dire, autour de la racine $s = ia$, $R(s) = 1/(s+ia)^2$ et

$$A_0 = \left.\frac{1}{(s+ia)^2}\right|_{s=ia} = -\frac{1}{4a^2}$$

De même,

$$A_1 = \left.\frac{-2}{(s+ia)^3}\right|_{s=ia} = \frac{1}{4ia^3}$$

Comme l'originale de $1/(s \mp ia)^2$ est $t\exp(\pm iat)$ et que l'originale de $1/(s \mp ia)$ est $\exp(\pm t)$, en regroupant correctement les termes, on trouve que

$$f(t) = -\frac{1}{2a^2} t\cos(at) + \frac{1}{2a^3}\sin(at).$$

## 1.4 Comportement assymptotique.

### 1.4.1 Comportement pour $t \to +\infty$.

Si nous connaissons la transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$, nous pouvons parfois trouver des approximations de cette fonction quand $t \to \infty$. Par exemple, les fonctions de Bessel $I_n(t)$ sont définies par

$$I_n(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{t\cos\theta}\cos(n\theta)d\theta$$

et il n'est pas difficile de démontrer [2] que la transformée de Laplace de $I_0(t)$ est $\hat{I}_0(s) = 1/\sqrt{s^2-1}$. Cette transformée nous permet facilement d'approximer, pour $t \gg 1$, la fonction de Bessel par $\exp(t)/\sqrt{2\pi t}$ (figure 1.1). Voyons voir le comment du pourquoi.

Nous nous sommes peu intéressés jusque là au domaine d'existence de la Transformée de Laplace. Il est évident que pour que la TL ait un sens, il faut que $\int_0^\infty f(t)\exp(-st)dt$ existe. Pour certaines fonctions comme $\exp(-t^2)$, cette condition est toujours réalisée. Pour d'autres, comme $\exp(t^2)$, elle ne l'est jamais. Enfin, pour la plupart de fonctions usuelles [3] , la condition est réalisée si $Re(s) > s_0$, où $s_0$ est un réel. Par exemple, pour toutes les fonctions polynomiales ou toute puissance positive de $t$, $s_0 = 0$. Pour la fonction $\cosh(t)$, $s_0 = 1$ [4].

2. en changeant l'ordre d'intégration sur $\theta$ et $t$, cf exercice 8.
3. lire "qui ne croissent pas plus vite qu'une exponentielle"
4. Puisque la fonction $\cosh(t)$ comporte un terme en $e^t$.

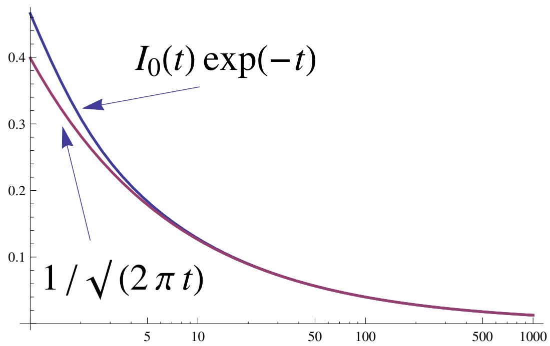


FIGURE 1.1 – Comparaison des la fonction de Bessel $I_0(t)$ et son approximation assymptotique (l'axe $x$ est logarithmique)

Souvent, nous nous intéressons surtout au comportement de $f(t)$ pour $t$ grand : nous voulons savoir rapidement si notre particule revient à une position donnée ou si au contraire, elle part à l'infini, et si elle part à l'infini, à quelle vitesse elle le fait. Nous allons voir dans la suite que le comportement de $\tilde{f}(s)$ autour de son pôle le plus à droite $s_0$ nous renseigne directement sur le comportement asymptotique de l'originale. Sans perte de généralité, nous allons supposer par la suite que $Re(s_0) = 0$, puisque si la TL de la fonction $f(t)$ a un pôle en $s = a$, la fonction $\exp(-at)f(t)$ a un pôle en $s = 0$. Le comportement asymptotique de la fonction $f(t)$ s'en déduit donc immédiatement.

Revenons maintenant à notre fonction $f(t)$. Si $I = \int_0^\infty f(t)dt < +\infty$, c'est que $f(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$ et nous n'avons pas trop de questions à nous poser pour son comportement asymptotique. Supposons donc que $I$ n'existe pas, mais que la TL de $f(t)$ est bien définie pour $Re(s) > 0$. Nous pouvons toujours écrire $f(t) = g(t) + h(t)$, où $g(t)$ contient le terme dominant de $f(t)$ quand $t \to \infty$ et $h(t)$ tous les autres. Par exemple, le terme dominant de $1/\sqrt{t} + \exp(-5t) + 1/(1 + t^2)$ est $1/\sqrt{t}$. Nous pouvons formellement écrire que $h(t) = o(g(t))$ [5]. Il est évident que pour $s \to 0$, la transformée de Laplace est dominée par la TL de $g(t)$, c'est à dire $\tilde{h}(s) = o(\tilde{g}(s))$ quand $s \to 0$ (exercice : le démontrer). Un simple développement autour du pôle le plus à droite de la TL nous donne donc directement le comportement asymptotique de l'originale.

**Exemple 1.** $\tilde{f}(s) = 1/s(s + a)$ pour $a > 0$ a son pôle le plus à droite à $s = 0$. Autour de ce point, $\tilde{f}(s) = 1/as + \mathcal{O}(1)$. Donc, $f(t) \approx 1/a$ quand $t \to \infty$ ( l'original de $1/s$ est bien sûr 1). Dans cet exemple, et ceux qui suivent, le lecteur est encouragé à calculer l'originale exacte et vérifier le développement assymptotique.

**Exemple 2.** $\tilde{f}(s) = 1/s(s-a)^2$ pour $a > 0$. Le pôle le plus à droite est en $s = a$. $\tilde{f}(s) \approx (1/a)(s - a)^{-2}$ quand $s \to a$ et donc $f(t) \approx (t/a)\exp(-at)$ quand $t \to \infty$. Remarquer

5. C'est à dire que $\lim_{t\to\infty} h(t)/g(t) = 0$. Les notations $\mathcal{O}$ et $o$ sont dues à Edmund Landau, mathématicien du premier tiers du vingtième siècle.

que nous aurions pû pousser l'approximation un peu plus loin : $\tilde{f}(s) \approx (1/a)(s-a)^{-2} - (1/a^2)(s-a)^{-1}$ et donc $f(t) \approx (t/a - 1/a^2)\exp(-at)$.

**Exemple 3.** $\tilde{f}(s) = 1/(s^2+a^2)^2$. Là, nous avons deux pôles de même partie réelle $s = \pm ia$, et nous devons tenir compte des deux. Nous laissons le soin au lecteur de démontrer que le terme dominant doit être $-t\cos(at)/2a^2$.

Nous avons en fait souvent recours au développement asymptotique parce que nous ne savons pas calculer exactement l'originale. Prenons l'équation $\ddot{x}+\dot{x} = \sqrt{t}$ avec des conditions initiales nulles. C'est l'équation du mouvement d'un corps soumis à un frottement visqueux et à une force qui grandit comme la racine du temps. La solution est facilement trouvée en terme de TL : $\tilde{x}(s) = (\sqrt{\pi}/2)s^{-5/2}(s+1)^{-1}$. Nous ne savons pas calculer[6] l'originale de cette fonction. Par contre, comme il existe un pôle à zéro, le développement asymptotique s'écrit $x(t) \approx (4/3\sqrt{\pi})t^{3/2}$(Le démontrer ; pouvez vous calculer les deux prochaines corrections à ce développement ? ).

### 1.4.2 Comportement pour $t \to 0$.

Nous disposons d'un théorème analogue pour trouver le comportement de $f(t)$ autour de $t = 0^+$ si nous disposons de sa transformée de Fourier. Il n'est pas difficile de voir que

$$f(0) = \lim_{s\to\infty} s\hat{f}(s) \tag{1.4}$$

Ceci découle simplement des règles de TL :

$$\mathrm{TL}[f'(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt = s\hat{f}(s) - f(0)$$

Or, quand $s \to \infty$, l'intégrale tend vers zéro, d'où l'égalité (1.4). Nous pouvons bien sûr aller plus loin. Le développement de Taylor de $f(t)$ proche de $t = 0$ s'écrit

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + (1/2)f''(0)t^2 + ...$$

et résulte de la TL inverse du développement asymptotique de $sf(s)$ pour $s \to \infty$. (voir l'exercice 9).

## 1.5 Produit de Convolution.

Le produit de convolution de deux fonctions est donné par

$$h(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \tag{1.5}$$

On note cela par $h(t) = (f \star g)(t)$. Il est facile de démontrer, en échangeant l'ordre d'intégration, que

$$\tilde{h}(s) = \tilde{f}(s).\tilde{g}(s)$$

La solution de beaucoup d'équation différentielle se met naturellement sous la forme (1.5).

6. Pas avec notre dictionnaire actuel.

**Exemple : la méthode de la variation des constantes.** Nous voulons résoudre l'équation ordinaire à coefficient constant *avec* second membre

$$\dot{x}(t) + ax(t) = f(t)$$

En prenant la TL, nous trouvons que

$$\tilde{x}(s) = \frac{1}{s+a}\tilde{f}(s) + \frac{x_0}{s+a}$$

Comme l'originale de $1/s + a$ est $\exp(-at)$, en utilisant le résultat sur les produits de convolution, nous trouvons

$$x(t) = e^{-at}\left(x_0 + \int_0^t e^{a\tau} f(\tau) d\tau\right)$$

Ce résultat est connu sous le nom de la méthode de la variation des constantes et se généralise (à l'aide des décompositions en fraction simple) aux équations de degrés quelconques.

## 1.6 Aperçu des équations intégrales.

Il existe une classe d'équations intégrales (qu'on appelle de Voltera) qui s'écrivent sous la forme :

$$f(t) = \int_0^t f(\tau) K(\tau, t) d\tau + \lambda$$

Dans le cas où le noyau $K$ est symétrique, c'est à dire qu'il s'écrit sous la forme $K(t-\tau)$, ces équations admettent une solution simple en terme de transformées de Laplace. En prenant la TL des deux cotés, on trouve :

$$\tilde{f}(s) = \tilde{f}(s)\tilde{K}(s) + \frac{\lambda}{s}$$

c'est à dire que $\tilde{f}(s) = \lambda/s(1 - \tilde{K}(s))$. C'est ensuite un exercice de trouver l'originale ou en tout cas son développement asymptotique.

## 1.7 Aperçu des systèmes de contrôle asservis (*feedback systems*).

Quand on conduit une voiture et que l'on tourne le volant ou que l'on appuie sur la pédale de frein, on n'exerce pas directement une action sur les roues, mais on actionne des circuits hydrauliques qui s'en chargent. Ces circuits sont munis d'automatismes qui règlent la pression sur les roues exactement comme demandée, quelque soit les conditions extérieures. Pour pouvoir effectuer cela, il faut qu'ils soit munis des mécanismes correcteurs qui constamment comparent la direction ou la pression des roues actuelles à

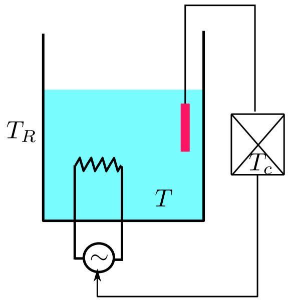


FIGURE 1.2 – Schéma général du dispositif. Le bain doit être amené et maintenu à température de consigne $T_c$, tandis que la température de la chambre est à $T_R$. La température du bain peut être augmenté en faisant passer un courant électrique dans une résistance à l'intérieur du bain. Un automate mesure constamment la température du bain $T$ à l'aide d'une sonde, la compare à la consigne $T_c$ et régule la tension du générateur électrique.

la consigne demandée et réduisent l'erreur. Si l'on regarde autour de nous, des objets les plus simples comme un réfrigérateur qui maintient sa température quand on ouvre ou ferme sa porte aux objets les plus complexes, comme l'ABS ou le pilotage d'un avion, nous sommes entouré d'automatisme. En cela bien sûr nous ne sommes qu'entrain d'imiter le monde vivant qui a implanté ces mécanismes à tous les niveaux, de la reproduction de l'ADN aux mouvements d'une bactérie ou à la marche d'un bipède.

Il se trouvent que la très grande majorité des automates est constitué d'automate dont l'action est gouvernée par des équations différentielles linéaires [7]. L'outil primordial pour étudier et concevoir les automates est la transformée de Laplace. On peut dire sans exagérer que les "*automateurs*" passent la majorité de leur temps dans l'espace de Laplace [8]. Nous allons étudier l'exemple fondamental des régulateurs PID.

Le régulateur PID est apparu dans les années 1920 ; les opérations d'intégration et de dérivation que nous allons voir étaient effectuées par des éléments mécaniques (ressort, masse,..) ou électroniques (circuits RLC).

Supposons que nous voulons maintenir un bain thermique à une température de consigne $T_c$ dans une chambre à température $T_R$. Nous avons de nombreuses sources de perturbation, comme des courants d'air ou une température fluctuante dans la chambre [9]. Notre automate doit maintenir le bain à $T_c > T_R$ malgré ces perturbations (Figure 1.2).

En l'absence de source de chaleur, un bain à température $T > T_R$ perd de la chaleur et se refroidit :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = r(T_R - T)$$

$r$ est un coefficient qui reflète l'échange de la chaleur entre le bain et la chambre et dépend de l'isolation du bain. Nous ne connaissons pas la valeur exacte de $r$.

7. Depuis les années 1990 et la disponibilité des microcontrôleur, le paysage a pas mal changé.
8. Comme les cristallographes passent la majorité de leur temps dans l'espace de Fourier.
9. La porte !

Nous pouvons injecter de la puissance $P(t)$ dans le bain à l'aide d'un générateur électrique, auquel cas l'évolution de la température dans le bain s'écrit

$$\frac{\partial T}{\partial t} = r(T_R - T) + P(t) \tag{1.6}$$

Le contrôleur doit décider à chaque instant $t$ de la puissance à injecter $P(t)$ pour atteindre la consigne. Nous supposons qu'à $t = 0$, $T = T_R$.

La première idée serait de programmer le contrôleur de façon *proportionnelle* (d'où le P du PID) :

$$P(t) = \alpha(T_c - T)$$

plus on est loin de la consigne, plus on injecte de la puissance. Notre équation (1.6) s'écrit alors $\partial_t T = r(T_R - T) + \alpha(T_c - T)$ et sa transformée de Laplace nous donne

$$(s + \alpha + r)\hat{T}(s) = \frac{\alpha T_c + rT_R}{s} + T_R$$

Le développement asymptotique pour $s \to 0$ finalement nous montre que pour $t \to \infty$, le bain atteint la température

$$T_{eq} = \frac{\alpha T_c + rT_R}{\alpha + r} < T_c$$

Notre dispositif n'est pas très bon, puisque le bain ne peut pas atteindre $T_c$. Le problème est que si le bain atteint $T_c$, le générateur cesse d'y injecter de la puissance et le bain se met à refroidir. Il nous faut quelque chose qui continue d'injecter de la puissance même quand on est à $T_c$.

L'idée extrêmement élégante était d'apprendre à l'automate *ses erreurs passées*, en y ajoutant un terme qui somme l'historique des écarts à la consigne :

$$P(t) = \alpha(T_c - T) + \beta \int_0^t (T_c - T) d\tau$$

Cette fois, la TL de l'équation (1.6) nous donne

$$\left( s + \alpha + r + \frac{\beta}{s} \right) \hat{T}(s) = \frac{\alpha T_c + rT_R}{s} + \frac{\beta T_c}{s^2} + T_R$$

et le développement asymptotique pour $s \to 0$ nous montre que pour $t \to \infty$, le bain atteint la température

$$T_{eq} = T_c$$

et ceci quelque soit $T_R$, $r$, $\alpha$ et $\beta$. Notre simple automate se débrouille fort bien. Évidemment, en réalité, nous devons atteindre la température de consigne rapidement et nous y maintenir de façon stable ; c'est pourquoi dans les régulateur PID, il existe aussi un terme différentielle et que les coefficients $\alpha$ et $\beta$ sont ajustable, mais le principe général est là.

## 1.8 La physique statistique.

En physique statistique, la fonction de partition $Z$ est une sorte de moyenne (pondérée par $\beta = 1/KT$ ) des énergies que peut atteindre un système. Si l'indice $i$ dénombre les états possibles du système, chacun avec l'énergie $E_i$, alors

$$e^{-\beta F} = Z(\beta) = \sum_i e^{-\beta E_i}$$

La quantité $F$ est appelé l'énergie libre du système.

Il arrive souvent que beaucoup d'état ont la même énergie et dans ce cas, ont peut les regrouper dans la somme :

$$Z(\beta) = \sum_E e^{-\beta E} n(E)$$

où cette fois, nous sommons sur les énergies disponibles au système ; $n(E)$ désigne le nombre d'états ayant l'énergie $E$. Si la différence entre les niveaux d'énergie est faible par rapport à notre mesure, nous pouvons récrire la somme ci-dessus sous forme d'une intégrale

$$Z(\beta) = \int_0^\infty e^{-\beta E} f(E) dE \tag{1.7}$$

où $f(E)dE$ est le nombre d'état avec une énergie entre $E$ et $E + dE$ ; toutes les énergies sont mesurées par rapport à l'énergie minimum du système $E_0$ que nous choisissons comme référence : $E_0 = 0$.

Ce que nous voyons là est très simple : la fonction de partition est la transformée de Laplace de la densité d'énergie.

**Exemple : l'oscillateur harmonique.** Soit une particule dans un champ quadratique, son énergie étant fonction de sa distance au centre : $E(x) = kx^2$. $x$ ici est la variable qui dénombre les états. Le nombre d'état entre $E$ et $E + dE$ est $1/\sqrt{kE}$. En nous reportant à la table des T.L., nous trouvons la fonction de partition

$$Z(\beta) = \sqrt{\frac{\pi}{k}} \beta^{-1/2}$$

**Problème : Transition de phase.** En utilisant la définition (1.7), démontrez que la fonction $Z(\beta)$ est forcément continue.

Par définition, une transition de phase (comme la transformation de l'eau en glace) est une discontinuité de la fonction de partition (ou de l'une de ses dérivées). Vous venez de démontrer que les transitions de phases ne peuvent pas exister. Où est l'erreur ? Ceci était un problème majeur de la physique statistique jusque dans les années 1920 et l'invention du modèle d'Ising par le scientifique du même nom. Ce modèle n'a reçu une solution qu'en 1944 par Onsanger. Les années 1970 ont vu apparaître les théories mathématiquement “sales” (dites groupes de renormalisation) pour traiter les transitions de phases de second ordre. Nous ne disposons à ce jour pas de théories mathématiques générales satisfaisantes pour les transitions de phase.

## 1.9 TL inverse.

Pour pouvoir effectuer les TL inverses, il faut connaître un minimum de la théorie d'intégration dans le plan complexe. Pour les lecteurs qui en sont familier, mentionnons la procédure qui est juste une adaptation des TF. Considérons la fonction $f(t)$ telle que $f(t<0)=0$. Nous pouvons écrire la fonction $e^{-ct}f(t)$ comme la TF inverse de sa TF :

$$e^{-ct}f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{0}^{\infty}e^{-ct}f(t)e^{-i\omega t}dt\right)e^{i\omega t}d\omega$$

La borne inférieure de la deuxième intégrale commence à zéro puisque la fonction est nulle pour $t<0$. (i) En multipliant les deux côtés par $e^{ct}$ ; (ii) en posant $s=c+i\omega$ ; (iii) en prenant soin dans la deuxième intégrale du changement de variable $d\omega=ds/i$ ; (iv) et enfin en reconnaissant une TL classique dans l'intégrale intérieure, nous aboutissons à

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\hat{f}(s)e^{st}ds$$

l'intervalle $]c-i\infty,c+i\infty[$ désigne une droite parallèle à l'axe imaginaire et de coordonnée réelle $c$ dans le plan complexe. Il faut choisir $c>Re(s_0)$, où $s_0$ est le pôle le plus à droite de la fonction $\hat{f}(s_0)$. Nous déférons une discussion plus détaillée de cette procédure jusqu'au chapitre sur les fonctions complexes.

## 1.10 Exercices.

1. Trouver la TL des fonctions suivantes : $\sin(at)$ ; $\cos(at)$ ; $\sinh(at)$ ; $\cosh(at)$ ;
2. Trouver, par la méthode de votre choix, l'original de $a^2/(s^2+a^2)^2$. Help : Remarquez que vous pouvez écrire cette fonction comme $(s^2+a^2)/(s^2+a^2)^2-s^2/(s^2+a^2)^2$, et que le dernier terme vaut $(1/2)s(-d/ds)(1/(s^2+a^2)$. Il suffit ensuite d'utiliser les règles de manipulation des TL pour remonter à l'originale.
3. Démontrez que TL$[t^k]=k!/s^{k+1}$.
4. Trouver la TL du delta de Dirac.
5. La TL de la fonction escalier $\sum_{n=0}H(t-n)$ est $1/s(1-e^{-s})$.
6. La TL d'une fonction $a-$periodique $f(t)$ ($f(t+a)=f(t)$ ) est $\hat{f}(s)/(1-e^{-as})$, où $\hat{f}(s)=\int_0^a f(t)\exp(-st)dt$.
7. Représentez graphiquement, et trouvez la TL des fonctions suivantes : $(t-a)H(t-a)$ ; $H(t)-H(t-a)$ ; $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nH(t-na)$ ; $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(t-na)H(t-na)$
8. Les fonctions de Bessel jouent un rôle très important en physique mathématique. Elles jouent un rôle important pour l'équation de Laplace en coordonnées cylindriques, analogue à celui des fonctions circulaires à une dimension. L'une d'elle est définie par
$$I_0(z)=(1/2\pi)\int_0^{2\pi}e^{z\cos\theta}d\theta$$

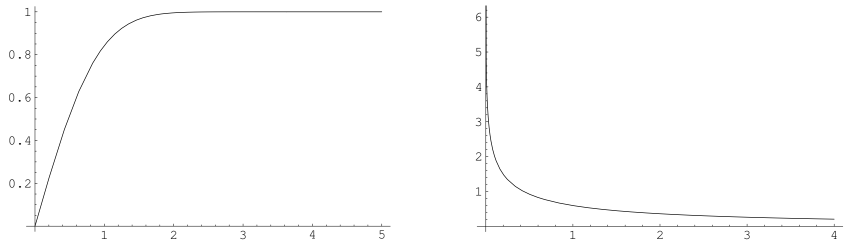


FIGURE 1.3 – Les fonctions erf$(t)$ et $\exp(t)\Gamma(0,t)$

Démontrer que sa T.L. est
$$\tilde{I}_0(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2-1}}$$
Démontrez que $I_0(t) \approx (1/\sqrt{2\pi})\sqrt{t}\exp(t)$ quand $t \to +\infty$. Help : Pour Calculer des $\int R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$, on a intérêt à effectuer le changement de variable $u = \tan(\theta/2)$

9. Les fonctions de Bessel $I_n(t)$ obéissent à l'équation différentielle
$$t^2u''(t) + tu'(t) - (t^2+n^2)u(t) = 0$$
Démontrer alors que la TL de la fonction $u(t)$ obéit à l'équation
$$(s^2-1)\hat{u}''(s) + 3s\hat{u}'(s) + (1-n^2)\hat{u}(s) = 0$$
Résoudre cette équation pour $n=1$ (l'équation se ramène alors à une équation de premier ordre) et démontrer que sa solution est de la forme
$$\hat{u}(s) = C_0 + C_1/\sqrt{s^2-1}$$
Sachant que $I_1(0) = 0$, $I'(0) = 1/2$ et en utilisant le comportement asymptotique de $s\hat{u}(s)$, démontrer que $C_1 = -C_0 = 1$. Sachant que $I_0'(t) = I_1(t)$, déduire également la TL de la fonction $I_0(t)$. Enfin, en utilisant la relation de récurrence
$$2I_n'(t) = I_{n-1}(t) + I_{n+1}(t)$$
Obtenez la forme générale des TL des fonction de Bessel $I$.

10. La fonction d'erreur est définie par $\mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-u^2}du$ (voir figure 1.3). Elle joue un rôle fondamentale en probabilité. Démontrer que la TL de $\exp(-t^2)$ est $(\sqrt{\pi}/2)\exp(s^2/4)(1-\mathrm{erf}(s/2))$. En déduire également la TL de la fonction erf$(t)$.

11. La fonction Gamma d'Euler est définie par $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}\exp(-t)dt$. Il n'est pas difficile de démontrer que $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ ( le faire ) et donc que cette fonction est la généralisation de la fonction factorielle $n! = \Gamma(n+1)$. La fonction d'Euler incomplète est définie par $\Gamma(\alpha,z) = \int_z^\infty t^{\alpha-1}\exp(-t)dt$ (voir figure 1.3). Son développement asymptotique est donné (pour $z\to\infty$) par $z^{\alpha-1}\exp(-z)$. Tout ça pour vous demander de démontrer que TL$[1/(1+t)] = \exp(s)\Gamma(0,s)$. Généraliser se résultat aux puissance négative de $(1+t)$.

12. Trouver le comportement asymptotique de l'originale de la fonction $1/(s^2+a^2)^2$. Attention : les deux pôles sont imaginaires pures et contribuent également.
13. La fonction de Bessel J d'ordre 0 est définie par $J_0(z) = I_0(iz)$,et sa TL est $(s^2+1)^{-1/2}$ (Pouvez vous le démontrer ?). Démontrer que son comportement asymptotique est donnée par $J_0(z) \approx \sqrt{2/\pi z}\cos(z-\pi/4)$.
14. Résoudre $\ddot{x}+\omega^2 x = b\sin(\omega t)$ avec des conditions initiales $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = v_0$. Notez que c'est l'équation d'un oscillateur harmonique forcé à sa fréquence de résonance.
15. Résoudre $x^{(3)}+3\ddot{x}+3\dot{x}+x = 1$ avec les conditions initiales nulles.
16. Résoudre $x^{(4)}+2\ddot{x}+x = \sin t$ avec les conditions initiales nulles.
17. Le mouvement d'une particule dans un champs magnétique peut être ramené à la résolution du système suivant :
$$\dot{x} = \alpha y \ ; \ \dot{y} = -\alpha x$$
où $x, y$ sont les composantes du vecteur vitesse et $\alpha$ une constante proportionnelle au champs magnétique et à la charge de la particule. Les conditions initiales sont à $t = 0$ , $x = x_0; y = y_0$. Résoudre ce système à l'aide des transformées de Laplace.
18. Résoudre
$$\begin{aligned} \ddot{x}-x+y+z &= 0 \\ x+\ddot{y}-y+z &= 0 \\ x+y+\ddot{z}-z &= 0 \end{aligned}$$
avec les conditions initiales $x(0) = 1$ et $y(0) = z(0) = \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0$.
Sol. : $x(t) = (2/3)\cosh(t\sqrt{2})+(1/3)\cos t\,;\ y(t) = z(t) = -(1/3)\cosh(t\sqrt{2})+(1/3)\cos t$.
19. Donner la solution générale, sous forme de produit de convolution, de l'équation
$$y''+2ay+b = f(t)$$
avec les conditions initiales $y(0) = y_0\,;\ y'(0) = v_0$. Considérer les deux cas où $a^2-b \neq 0$ et $a^2-b = 0$.

### Problème : la propagation des ondes.

Nous nous intéressons à nouveau à la résolution de l'équation des cordes vibrantes. Nous l'avons déjà rencontré dans le chapitre sur les distributions, et nous le verrons encore dans la section consacrée aux fonctions de Green. Nous allons ici utiliser les TL pour résoudre ces équations, *avec des conditions initiales données.* Nous avons vu que les TL sont très bon quand il s'agit d'avoir un début des temps.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{1.8}$$
$$u(x,0) = f(x) \tag{1.9}$$
$$\partial_t u(x,0) = g(x) \tag{1.10}$$

Nous savons sa solution est donnée par

$$u(x,t) = f(x-ct) + f(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)d\xi \qquad (1.11)$$

Nous allons établir la même chose, mais en utilisant de façon combiné les TF *et* les TL, ces dernières ayant l'avantage de gérer automatiquement les conditions initiales. Le schéma de la résolution que nous allons mener est le suivant : $u(x,t) \overset{\mathrm{TL}}{\to} \hat{u}(x,s) \overset{\mathrm{TF}}{\to} \tilde{\hat{u}}(q,s) \overset{\mathrm{TL}^{-1}}{\to} \tilde{u}(q,t) \overset{\mathrm{TF}^{-1}}{\to} u(x,t)$. Noter que $t \in [0,+\infty[$, donc nous allons effectuer des TL par rapport à cette variable. Par contre, $x \in ]-\infty,+\infty[$, donc nous allons procéder à des TF pour cette dernière.

**1.** En prenant la TL de l'équation (1.8) par rapport à la variable $t$, démontrer que

$$-c^2\frac{d^2\hat{u}(x,s)}{dx^2} + s^2\hat{u}(x,s) = sf(x) + g(x).$$

**2.** En prenant la TF de cette dernière, demontrer que

$$\tilde{\hat{u}}(q,s) = \frac{s}{c^2q^2+s^2}\tilde{f}(q) + \frac{1}{c^2q^2+s^2}\tilde{g}(q)$$

où $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ sont les TF des fonctions $f$ et $g$ .

**3.** En prenant la TL inverse, démontrer qu'on obtient

$$\tilde{u}(q,t) = \tilde{f}(q)\cos(ctq) + \frac{\sin(ctq)}{cq}\tilde{g}(q) \qquad (1.12)$$

**4. Résultat intermédiaire.** Démontrer que si la TF de $g(x)$ et $\tilde{g}(q)$, alors

$$\int_{x-a}^{x+a} g(\xi)d\xi \overset{\mathrm{TF}}{\longrightarrow} \frac{2\sin(aq)}{q}\tilde{g}(q)$$

**5.** En utilisant le résultat intermédiaire ci-dessus, et les règles de translations pour les TF, prendre la TF inverse de (1.12) pour obtenir l'équation dans l'espace direct.

## Problème : le théorème H.

**Introduction.** Nous souhaitons déterminer la fonction $c(x,t)$ obéissant à l'équation

$$\int_{p=0}^{1}\int_{x_1=0}^{\infty}\int_{x_2=0}^{\infty} c(x_1)c(x_2)\delta\left(p(x_1+x_2)-x\right)dx_2dx_1dp \\ -c(x) = 0 \qquad (1.13)$$

$\delta$ désigne bien-sûr la distribution $\delta$ de Dirac. Cette équation est à la base du théorème H établit par Boltzmann vers 1870 et forme le cœur de la théorie cinétique des gaz et de la physique statistique. Nous allons voir ici qu'aussi intimidant qu'elle paraisse à priori, cette équation se traite en faite facilement par les outils que nous avons vus dans notre cours. Du point de vue de la physique, la variable $x$ dénote l'énergie cinétique ; $c(x)$ est le nombre de molécules ayant l'énergie $x$ ; $p$ désigne le taux de distribution d'énergie après le choc entre deux particules. Comme les molécules ont une énergie cinétique positive,

$$c(x) = 0 \quad \text{si } x < 0 \tag{1.14}$$

**1.** Nous pouvons effectuer l'intégrale triple ci-dessus dans l'ordre que nous voulons. Nous commencerons par intégrer sur $x_2$. Démontrer alors que l'intégrale triple se transforme en une intégrale double

$$\int_{p=0}^{1} (1/p) \int_{x_1=0}^{\infty} c(x_1)c(x/p - x_1)dx_1 dp \tag{1.15}$$

En utilisant la condition (1.14), montrer que l'intégrale double ci-dessus se ramène à

$$\int_{p=0}^{1} (1/p) \int_{x_1=0}^{x/p} c(x_1)c(x/p - x_1)dx_1 dp$$

L'intégrale sur $x_1$ commence à prendre la tête d'un produit de convolution, nous avons intérêt à passer en TL.

**2.** Concentrons nous sur l'intégrale sur $x_1$ :

$$I_1(x) = \int_{x_1=0}^{x/p} c(x_1)c(x/p - x_1)dx_1$$

et passons en Transformé de Laplace $x \overset{\text{TL}}{\to} \beta$, $c(x) \overset{\text{TL}}{\to} \hat{c}(\beta)$, $I_1(x) \overset{\text{TL}}{\to} \hat{I}_1(\beta)$. Nous savons, d'après la règle des dilatation en TL, que $\text{TL}[f(x/p)] = p\hat{f}(\beta p)$. En utilisant cette relation, et le résultat sur les produits de convolution, démontrer que

$$\hat{I}_1(\beta) = p\hat{c}(\beta p)^2$$

Et donc que l'équation du bilan (1.13) se met sous la forme

$$\int_{p=0}^{1} \hat{c}(\beta p)^2 dp - \hat{c}(\beta) = 0$$

Effectuez un dernier changement de variable évident pour mettre le résultat sous la forme de

$$\frac{1}{\beta}\int_{0}^{\beta} \hat{c}(u)^2 du - \hat{c}(\beta) = 0 \tag{1.16}$$

**3.** Vérifier que la fonction

$$\hat{c}(\beta) = \frac{A}{\beta + A}$$

où $A$ est une constante est solution de l'équation (1.16) ci-dessus. [ Pour trouver cette solution, il suffit de remarquer que l'équation (1.16) peut se transformer en une équation différentielle de Riccati en dérivant une fois].

**4.** Soit $T = \int_0^\infty xc(x)dx$ ; $T$ représente l'énergie totale du gaz. Démontrer que

$$T = -\left.\frac{\partial \hat{c}(\beta)}{\partial \beta}\right|_{\beta=0}$$

En déduire que $A = 1/T$. En inversant la TL, déduire que la distribution des énergies dans le système à l'état stationnaire est

$$c(x) = \frac{1}{T} e^{-x/T}$$

On prétend que cette formule est gravée sur la tombe de Boltzmann.

## Problème : le modèle de Glauber.

Les transitions de phase paraissait hors de porté de la physique statistique jusqu'à ce que Ising propose son modèle de magnétisme dans les années 1920. Il existe de nombreuse façon de résoudre ce modèle à une dimension où paradoxalement, il n'existe pas de transition de phase. Plus exactement, la transition de magnétisation arrive seulement quand la température est abaissée à 0K. En 1963, Glauber a proposé un modèle cinétique équivalent au modèle d'Ising à une dimension.

Considérons une chaîne de dipôle magnétique, ou spin. Nous supposons que les spins ne peuvent prendre que deux valeurs, $\pm 1$, correspondant aux dipôles pointant vers le "haut" ou vers le "bas". Quand une majorité de spin pointe dans une direction, le matériaux devient magnétique. Chaque spin n'interagit qu'avec ses deux plus proches voisins, et tente d s'aligner sur eux. Plus exactement, il a une certaine probabilité de s'aligner sur ces voisins ... Plus tard.aboutir au résultat (1.11)