# Systèmes dynamiques en biologie

## Chapitre 2: Systèmes discrets et dynamique des populations
## Cours N°6: Dynamique de deux populations

Mohammed Salah Abdelouahab

MI

# Modèle de Nicholson-Bailey

C'est un modèle qui décrit la dynamique d'un système hôte-parasitoïde d'une génération à la suivante. Sa forme est la suivante

$$\begin{cases} x_{n+1} = \alpha x_n e^{-a y_n}, \\ y_{n+1} = c x_n (1 - e^{-a y_n}), \end{cases}$$

avec $x_n$, $y_n$ sont le nombre d'hôtes et le nombre de parasitoïdes à la génération n.
$\alpha$ le taux de croissance intrinsèque des hôtes.

# Modèle de Nicholson-Bailey

$$\begin{cases} x_{n+1} = \alpha x_n e^{-ay_n}, \\ y_{n+1} = c x_n \left(1 - e^{-ay_n}\right), \end{cases}$$

En l'absence de parasitoïde la première équation s'ecrit

$$x_{n+1} = \alpha x_n.$$

La fonction

$$e^{-ay_n} \leq 1$$

représente la fraction des hôtes non parasités qui vont contribuer à la génération suivante des hôtes. Cette fonction réduit la croissance des hôtes en présence du parasitoïde.
Le paramètre $a > 0$ quantifie l'impact du parasitoïde sur son hôte. La fonction $\left(1 - e^{-ay_n}\right)$ représente la fraction des hôtes qui sont parasités qui vont donc contribuer à la prochaine génération des parasitoïdes.
$c$ est le nombre moyen de parasitoïdes viables issus d'un seul hôte parasité.

# Points fixes et stabilité

Les points fixes de ce système sont $(x^*, y^*)$ tels que

$$\begin{cases} x^* = \alpha x^* e^{-ay^*}, \\ y^* = cx^*(1 - e^{-ay^*}), \end{cases}$$

ce qui donne $(x^*, y^*) = (0,0)$ ou $(x^*, y^*) = (\frac{\alpha \ln(\alpha)}{ac(\alpha-1)}, \frac{\ln(\alpha)}{a})$, qui'il a du sens si $\alpha > 1$ (si le taux de croissance des hôtes est supérieur à 1).

Calculons la matrice Jacobienne $A = \begin{pmatrix} \alpha e^{-ay_n} & -a\alpha x_n e^{-ay_n} \\ c(1 - e^{-ay_n}) & acx_n e^{-ay_n} \end{pmatrix}$, l'equation caracteristique est

$$\lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A) = 0.$$

Le point fixe $(x^*, y^*)$ est localement asymptotiquement stable ssi

$$|\lambda_i| < 1 \text{ pour } i = 1, 2. \Longleftrightarrow 2 > 1 + det(A) > |tr(A)|$$

# Points fixes et stabilité

**Stabilité de l'origine**

On a $A(0,0) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,alors l'origine est stable si $\alpha < 1$, et instable si $\alpha > 1$.

**Stabilité du point fixe non trivial** $(x^*, y^*)$

On a après sibstitution et simplification

$$A(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} 1 & -ax^* \\ c(1 - \frac{1}{\alpha}) & \frac{acx^*}{\alpha} \end{pmatrix}$$

, dont le déterminant est $\det(A(x^*, y^*)) = \frac{\alpha \ln(\alpha)}{\alpha - 1}$

Ce déterminant est supérieur à 1 pour $\alpha > 1$. En effet :

$$\det(A(x^*, y^*)) > 1 \Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha \ln(\alpha) - \alpha + 1 > 0$$

On a $f(1) = 0$ et $\frac{df}{d\alpha} = \ln(\alpha) > 0$ pour $\alpha > 1$,En conséquence $f(\alpha) > 0$, donc $\det(A(x^*, y^*)) > 1$, d'où $(x^*, y^*)$ est instable.

# Points fixes et stabilité

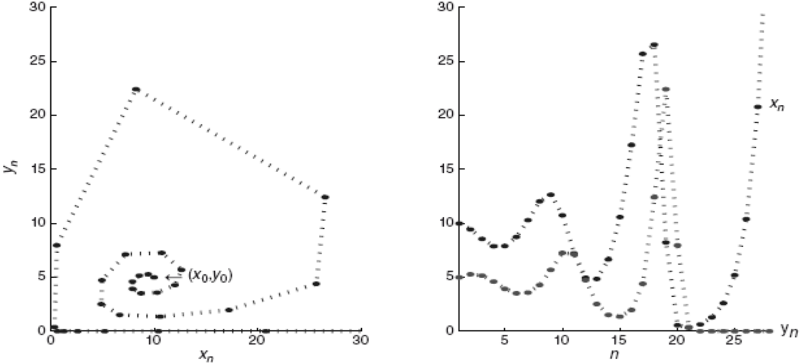


**Figure 4.13** Solutions du modèle de Nicholson-Bailey (4.1). $a = 0.15$, $\lambda = 2$, $c = 1$.