Centre Universitaire de Mila
Institut des Science et de la Technologie Année 2019-2020
Département de Mathématiques et Informatique Master 1 (MF+MA)
Matière : Systèmes dynamiques en biologie

Série de TD N°1 Avec Solutions

Exercice. 1

Considérons une population obéissant à une loi de croissance linéaire avec un taux $-\lambda$, soit x_0 le nombre d'individus à l'instant $t = 0$.

1) Trouver le nombre d'individus encore vivants à l'instant t, en déduire le nombre d'individus $|dx|$ disparaissant entre t et $t+dt$ (ayant une durée de vie égale exactement t).
2) Calculer la durée de vie moyenne $\bar{T}$ d'un individu au sein de cette population.

Solution Ex1

1) *Nombre d'individus encore vivants à l'instant* t

Le modèle est : $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\lambda x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ alors

le nombre d'individus encore vivants à l'instant t, $x(t) = x_0 e^{-\lambda t}$

D'où nombre d'individus disparaissant entre t et $t+dt$ (ayant une durée de vie égale exactement t) est $|dx| = x(t) - x(t+dt) = -\frac{dx}{dt}dt = \lambda x_0 e^{-\lambda t} dt$

2) *Calcule de la durée de vie moyenne* $\bar{T}$.

Premièrement on cherche toute les durées de vie de la population en intégrant $|dx|$ *ensuite on divise sur l'effectif globale de la population qui est* x_0 *on trouve alors la durée de vie moyenne*
$\overline{\mathrm{T}} = \frac{1}{\mathrm{x}_0}\int_0^{+\infty} \lambda x_0 \, t e^{-\lambda t}\, dt = \frac{1}{\lambda}$

Exercice. 2

Considérons l'équation de Gompertz:

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

avec $f(x) = rx\ln(\frac{k}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(x) = 0$ si $x = 0$

1) Déterminer les points d'équilibre et étudier leur nature de stabilité.
2) Étudier la croissance de la population au voisinage de $x = 0$
3) Dessiner l'allure des solutions (portrait de phase).
4) Trouver le point d'inflexion de la solution $x(t)$ et comparer le résultats avec l'équation logistique.

Solution Ex2

1) *Points d'équilibre et stabilité*
   - 0 est un point d'équilibre (évident)

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow rx = 0 \;\; ou \;\; \ln\left(\frac{k}{x}\right) = 0$

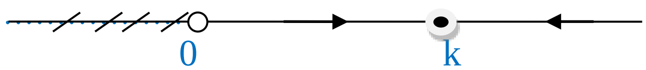
  $\Leftrightarrow \frac{k}{x} = 1 \Leftrightarrow x = k$

  $on\ a\ f'(x) = r\ln\left(\frac{k}{x}\right) - r \quad d'où\ f'(k) = -r \prec 0$

  $donc\ x = k\ est\ asymptotiquement\ stable$

2) *Croissance de la population au voisinage de* $x = 0$
   Comme x *est positif et proche de 0 alors* $\frac{k}{x} > 1 \Longrightarrow \ln\left(\frac{k}{x}\right) > 0$ *alors* $\frac{dx}{dt} > 0$ *donc x(t) est en croissance et l'équilibre 0 est instable.*

3) *Portrait de phase*



4) *Point d'inflexion*
   Le graphe de x(t) admet un point d'inflexion (t,x*) si* $\frac{d^2x}{dt^2}$ *s'annule à t* et* $\frac{d^3x}{dt^3}$ *ne s'annule pas à t**
   On a $\frac{dx}{dt} = rxln\left(\frac{k}{x}\right) = f(x)$ *d'où* $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{df(x)}{dt} = \frac{df(x)}{dt}\frac{dx}{dt}$ *et* $\frac{d^3x}{dt^3} = \frac{d^2f(x)}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{df(x)}{dx}\frac{d^2x}{dt^2}$
   (t,x*) point d'inflexion* $\Rightarrow (\frac{d^2x(t^*)}{dt^2} = 0\ et\ \frac{d^3x(t^*)}{dt^3} \neq 0) \Rightarrow (\frac{df(x^*)}{dx} = 0\ \ et\ \frac{dx(t^*)}{dt} \neq 0)$
   $\frac{df(x^*)}{dx} = 0 \Rightarrow r\left(ln\left(\frac{k}{x^*}\right) - 1\right) = 0 \Rightarrow ln\left(\frac{k}{x^*}\right) = 1$ alors $x^* = \frac{k}{e}$ et $\frac{dx(t^*)}{dt} = f(x^*) = \frac{rk}{e} \neq 0$
   Donc *le graphe de x(t) admet un point d'inflexion pour* $x = x^* = \frac{k}{e}$.

de la même manière on trouve le point d'inflexion pour l'équation logistique à $x^* = \frac{k}{2}$ donc le point d'inflexion de Gompertz est avant le point d'inflexion de l'équation Logistique.

Exercice. 3

La croissance d'une population est donnée par l'équation:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x^2 - mx$$

avec α le taux de natalité et m le taux de mortalité

1) Déterminer les points d'équilibre et étudier leurs stabilités.
2) Dessiner l'allure des solutions (portrait de phase).
3) Calculer les solutions explicitement et tracer la chronique pour $\alpha = 0.1, m = 1$

Solution Ex3

Solution Ex 03 :

1) *Points d'équilibre et stabilité :*

   On a : $f(x) = \alpha x^2 - mx$

On pose : $f(x)=0 \Leftrightarrow \alpha x^2 - m = 0 \Leftrightarrow x(\alpha x - m) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ \vee \\ x=\dfrac{m}{\alpha} \end{cases}$

Alors l'équation admet deux point d'équilibre $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{m}{\alpha}$ avec $\alpha > 0$.

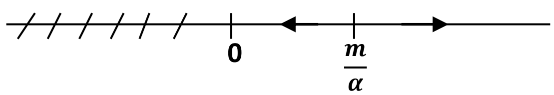
Stabilité

On a : $f'(x) = 2\alpha x - m$

Alors : $*\ f'(0) = -m < 0$, donc l'origine est stable

$*\ f'\left(\dfrac{m}{\alpha}\right) = m > 0$, donc $x_2 = \frac{m}{\alpha}$ est instable.

2) *Portrait de phase :*



3) *Solutions explicites*

On a :

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x^2 - mx \Rightarrow \frac{dx}{x(\alpha x - m)} = dt \Leftrightarrow \left(\frac{-1}{mx} + \frac{\alpha}{m(\alpha x - m)}\right)dx = dt \Leftrightarrow$$

$$\frac{-1}{m}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{m}\int \frac{\alpha}{(\alpha x - m)}dx = \int dt \Leftrightarrow$$

$$\frac{-1}{m}\ln(x) + \frac{1}{m}\ln(\alpha x + m)dx = t + c \Leftrightarrow \ln\left(\frac{\alpha x - m}{x}\right) = m(t+c) \Leftrightarrow \frac{\alpha x - m}{x} = e^{m(t+c)} \Leftrightarrow \alpha - \frac{m}{x} = e^{m(t+c)}$$

$$\Leftrightarrow x(t) = \frac{m}{\alpha - e^{mc}e^{mt}} = \frac{m}{\alpha - Ce^{mt}}$$

On a $\quad x(0) = \dfrac{m}{\alpha - C} = x_0$

Alors $\quad C = \alpha - \dfrac{m}{x_0}$ d'où $\quad \Leftrightarrow x(t) = \dfrac{m}{\alpha - (\alpha - \dfrac{m}{x_0})e^{mt}}$

Avec $\quad t \in [0, +\infty[$, si $x_0 \leq \dfrac{m}{\alpha}$.

$t \in \left[0, \dfrac{1}{m}\ln(\dfrac{\alpha}{C})\right[$, si $x_0 > \dfrac{m}{\alpha}$.

Exercice. 4

Considérons la loi de croissance d'une population donnée par:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha x}{N+x} - mx$$

1) Rechercher les points d'équilibre et étudier leurs propriétés de stabilité.
2) Tracer le portrait de phase.

Solution Ex4

1) *Points d'équilibre et stabilité*

On a la loi de croissance d'une population donnée par :

$$\frac{dx}{dt} = f(x) = \frac{\alpha x}{N+x} - mx = x*(\frac{\alpha}{N+x} - m)$$

a) On calcule les points d'équilibre :

$$f(x) = 0 \Rightarrow x*(\frac{\alpha}{N+x} - m) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ ou \\ x = \frac{\alpha}{m} - N \end{cases}$$

Donc : les points d'équilibre sont : $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{\alpha}{m} - N$.

b) On étudie la stabilité :

- *La dérivée de la fonction 'f ' est:*

$$f'(x) = \frac{\alpha N}{(N+x)^2} - m$$

$* f'(0) = \frac{\alpha - N*m}{N}$

$* f'\left(\frac{\alpha}{m} - N\right) = \frac{m\ (m*N - \alpha)}{\alpha}$

- *Si $\alpha < N*m$*

$* f'(0) < 0 \Rightarrow$ *le point d'équilibre "$x_1 = 0$ " est asymptotiquement stable.*

$* f'\left(\frac{\alpha}{m} - N\right) > 0 \Rightarrow$ *le point d'équilibre "$x_2 = \frac{\alpha}{m} - N$ " est instable.*

- *Si $\alpha > N*m$*

$* f'(0) > 0 \Rightarrow$ *le point d'équilibre "$x_1 = 0$ " est instable.*

$* f'\left(\frac{\alpha}{m} - N\right) < 0 \Rightarrow$ *le point d'équilibre "$x_2 = \frac{\alpha}{m} - N$ " est asymptotiquement stable.*

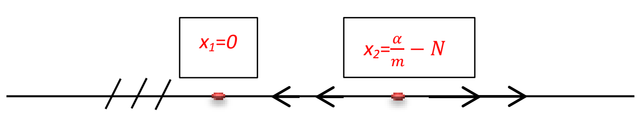
- *Si $\alpha = N*m$*

$* \frac{dx}{dt} = \frac{\alpha x}{N+x} - mx = \frac{(N*m)x - mx(N+x)}{N+x} = -\frac{m*x^2}{N+x} < 0 \Rightarrow \forall x > 0, la\ population\ est\ décroissante$

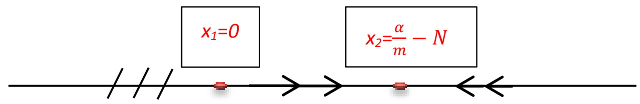
Donc : le point d'équilibre "$x_1 = 0$ " est asymptotiquement stable.

2) *Portrait de phase*

- *Si $\alpha <= N*m$*



- *Si α>N*m*



Exercice. 5

Les systèmes Hamiltoniens sont définis par les équations suivantes:

$$(I)\begin{cases} \dot{x} &= \frac{\partial H(x,p)}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H(x,p)}{\partial x} \end{cases}$$

où x est la position d'une particule ponctuelle, p sa quantité de mouvement et $H(x,p)$ son énergie totale.

montrer que les systèmes Hamiltoniens sont conservatifs.

Solution Ex5

On a :

$$\frac{dH(x,p)}{dt} = \frac{\partial H(x,p)}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial H(x,p)}{\partial p}\frac{dp}{dt} = \frac{\partial H(x,p)}{\partial x}\frac{\partial H(x,p)}{\partial p} - \frac{\partial H(x,p)}{\partial p}\frac{\partial H(x,p)}{\partial x} = 0$$

Alors $H(x,p)$ est une integrale première des systèmes *Hamiltoniens*

Donc : les systèmes Hamiltoniens sont conservatifs.

Exercice. 6

Rechercher si les systèmes suivants admet des intégrales premières:

1)

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

2)

$$\begin{cases} \dot{x} = x - xy \\ \dot{y} = -y + xy \end{cases}$$

Solution Ex6

1) *Recherche des intégrales premières pour le système* $\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases}$

On a

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-y}{x} \Rightarrow xdx=-ydy$$

Après intégration on obtient :

$$x^2 = -y^2 + c$$

Donc :

$$c = x^2 + y^2$$

Il est clair que :

$$H(x,y) = x^2 + y^2$$

Est une intégrale première car :

$$\frac{dH(x,y)}{dt} = \frac{\partial H(x,y)}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial H(x,y)}{\partial y}\frac{dy}{dt} = -2xy + 2yx = 0$$

2) *Recherche des intégrales premières pour le système* $\begin{cases} \dot{x} = x - xy \\ \dot{y} = -y + xy \end{cases}$

On a

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x - xy}{-y + xy} \Rightarrow (-y + xy)\,dx = (x - xy)\,dy \ \ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

On divise (*) par xy tell que $xy \neq 0$ *:*

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right)dx = \left(\frac{1}{y} - 1\right)dy$$

Après intégration on obtient :

$$-\ln x + x = \ln y - y + c$$

Donc :

$$y + x - (\ln x + \ln y) = c$$

Il est clair que :

$$H(x,y) = y + x - (\ln x + \ln y)$$

Est une intégrale première car :

$$\frac{dH(x,y)}{dt} = \frac{\partial H(x,y)}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial H(x,y)}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(x - xy) + \left(1 - \frac{1}{y}\right)(-y + xy) = 0$$

Exercice. 7

Considérons le système de Lotka Voltera avec croissance logistique:

$$\begin{cases} \dot{x} = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) - axy \\ \dot{y} = -my + bxy \end{cases}$$

1) Déterminer les points fixes.
2) Étudier leur stabilité.
3) Tracer le portait de phase.

Solution Ex7

1) *Points fixes*

$$\dot{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ ou \ r\left(1 - \frac{x}{k}\right) - ay = 0$$

$$\dot{y} = 0 \Leftrightarrow y = 0 \ ou \ -m + bx = 0$$

Alors les points fixes sont : $(0;0)$, $(k;0)$, $\left(\frac{m}{b};\frac{r}{a}\left(1 - \frac{m}{bk}\right)\right)$ si $k > \frac{m}{b}$

2) *Stabilité*

La matrice Jacobienne est : $A(x\,;y)=\begin{pmatrix} r-2\dfrac{r}{k}x-ay & -ax \\ by & -m+bx \end{pmatrix}$

La stabilité de l'origine :

On a : $A(0;0)=\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix}$ d'où les valeurs propres sont : $\lambda_1=r\succ 0\ ,\ \lambda_2=-m\prec 0$

Alors l'origine est instable (point selle).

La stabilité de $(k\,;0)$ *:*

On a : $A(k\,;0)=\begin{pmatrix} -r & -ak \\ 0 & -m+bk \end{pmatrix}$ d'où les valeurs propres sont :

$\lambda_1=-r\prec 0\ ,\ \lambda_2=-m+bk$

- *Si* $\lambda_2\prec 0$ (càd $k\prec\dfrac{m}{b}$) alors le point $(k\,;0)$ est asymptotiquement stable.
- *Si* $k>\frac{m}{b}$ le point $(k\,;0)$ est instable.

La stabilité de $\left(\dfrac{m}{b};\dfrac{r}{a}\left(1-\dfrac{m}{bk}\right)\right)$ *:*

On a : $A\left(\dfrac{m}{b};\dfrac{r}{a}\left(1-\dfrac{m}{bk}\right)\right)=\begin{pmatrix} -\dfrac{rm}{kb} & -\dfrac{am}{b} \\ \dfrac{r}{a}\left(b-\dfrac{m}{k}\right) & 0 \end{pmatrix}$

D'où le déterminant $det(A)=\dfrac{mr}{b}\left(b-\dfrac{m}{k}\right)$

- Si $b\succ\dfrac{m}{k}$ alors $det(A)\succ 0$ et la trace $tr(A)=-\dfrac{mr}{kb}\prec 0$ donc

le point $\left(\dfrac{m}{b};\dfrac{r}{a}\left(1-\dfrac{m}{bk}\right)\right)$ est asymptotiquement stable.

- *Si* $b<\frac{m}{k}$ *le* point est instable.

3) *Portrait de phase*

Les isoclines zéros sont les suivants :

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ ou \ \ y = \frac{r}{a}\left(1 - \frac{x}{k}\right) \\ \dot{y} = 0 \Leftrightarrow y = 0 \ ou \ \ x = \frac{m}{b} \end{cases}$$

La direction du champ des vecteurs sur les *isoclines zéros :*

- Sur l'axe $x = 0$ on a $\dot{y} = -my \prec 0$.
- Sur l'axe $y = 0$ on a $\dot{x} = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right)$

x	0		k		$+\infty$
$\dot{x}$		+	0	-	

- Sur $x = \frac{m}{b}$ on a $\dot{x} = \frac{rm}{b}\left(1 - \frac{m}{bk}\right) - \frac{am}{b}y$
- Si $k > \frac{m}{b}$

y	0		$\frac{r}{a}\left(1 - \frac{m}{bk}\right)$		$+\infty$
$\dot{x}$		+	0	-	

- Si $k < \frac{m}{b}$

y	0	$+\infty$
$\dot{x}$	-	

- Sur $y = \frac{r}{a}\left(1 - \frac{x}{k}\right)$ on a $\dot{y} = \frac{r}{a}\left(1 - \frac{x}{k}\right)(-m + bx)$

*** Si $k \prec \frac{m}{b}$ alors :

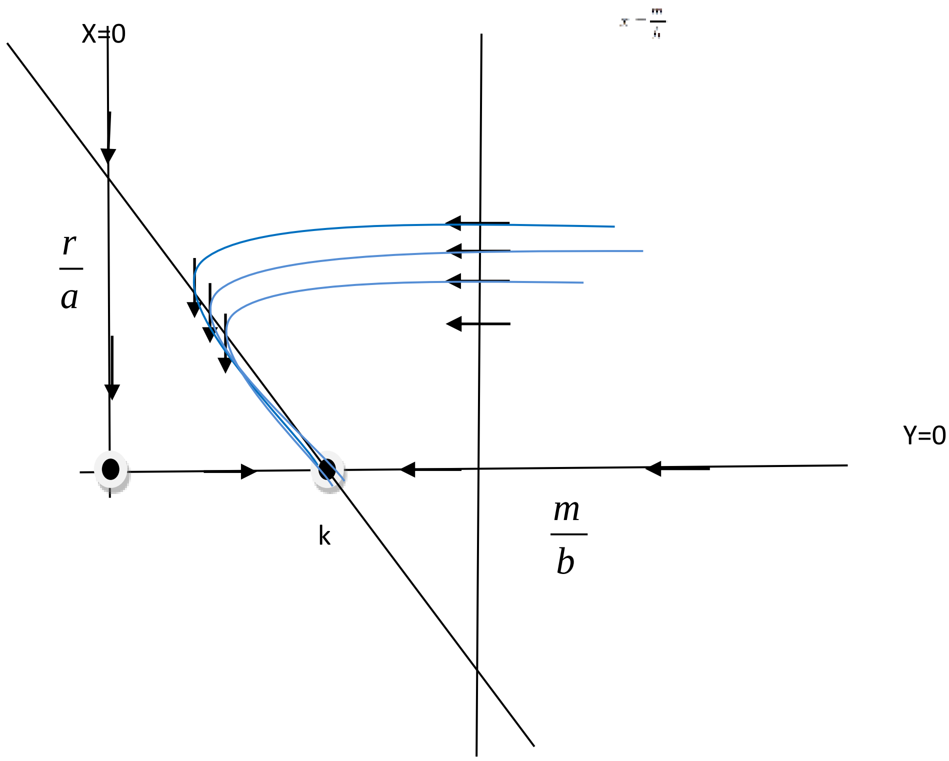
x	0		k		$\frac{m}{b}$		$+\infty$
$\dot{y}$		-	0	+	0	-	

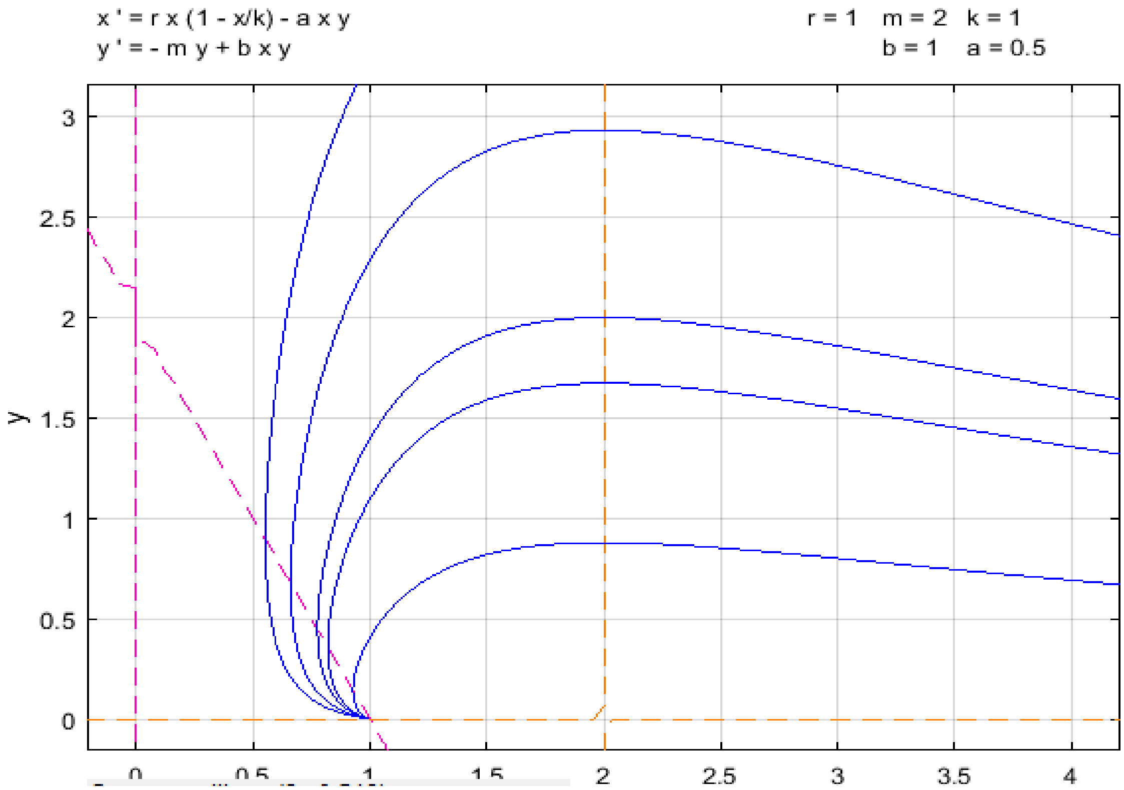
*** Si $k \succ \frac{m}{b}$ alors :

$y = \frac{r}{a}\left(1 - \frac{x}{k}\right)$

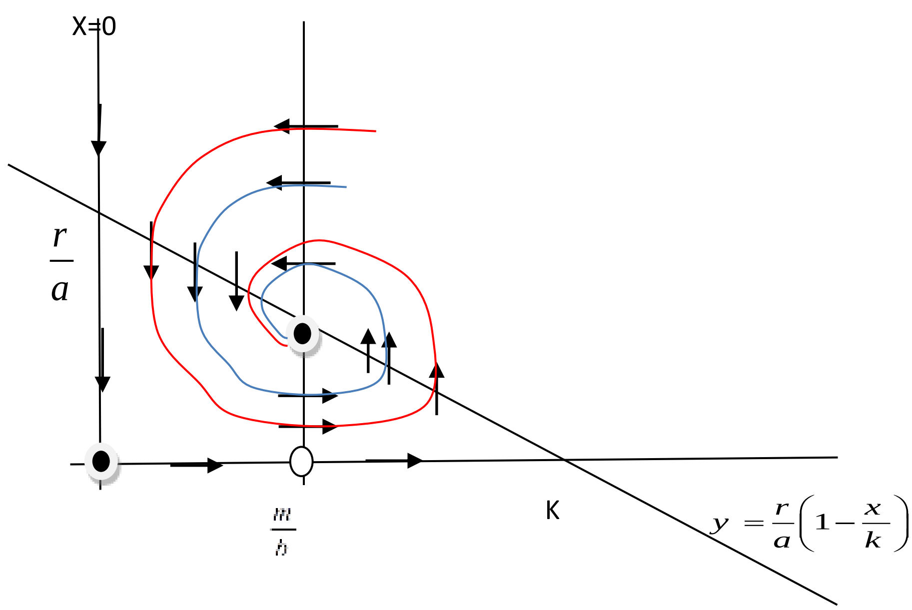
x	0		$\frac{m}{b}$		k		$+\infty$
$\dot{y}$		-	0	+	0	-	

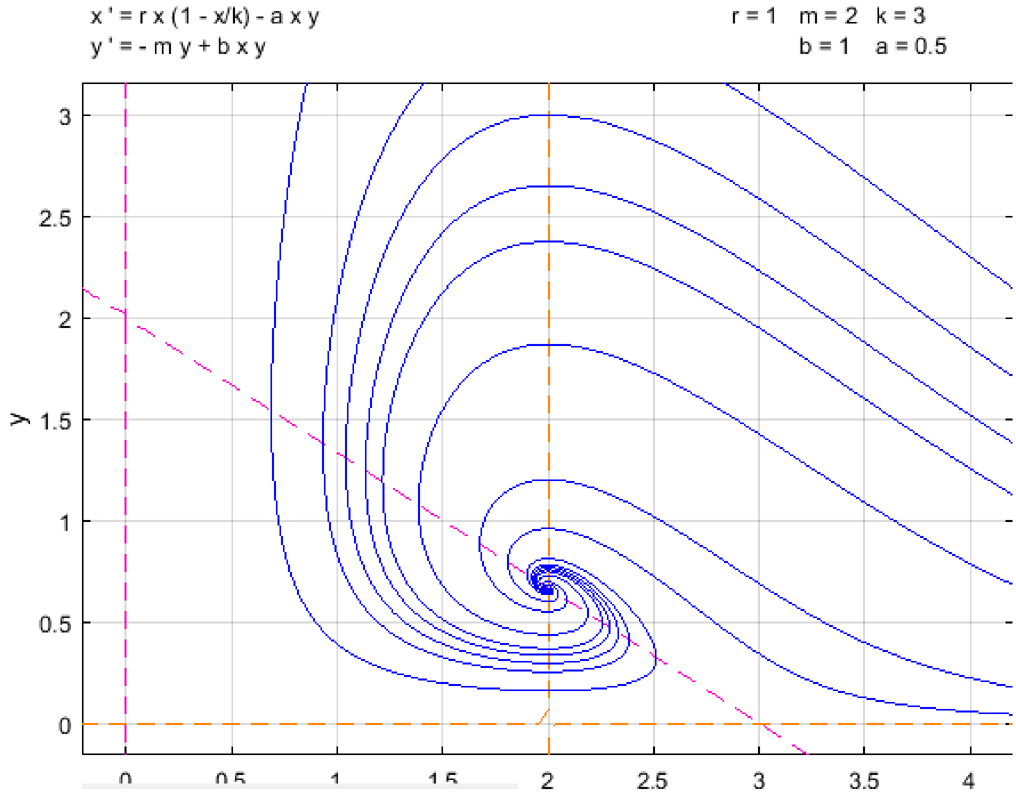
Portrait de phase dans le cas $k \prec \dfrac{m}{b}$ (deux points l'origine qui un col (instable) et $(k\,;0)$ qui est stable)





Portrait de phase dans le cas $k \succ \frac{m}{b}$ (deux points d'équilibres l'origine et $\left(\frac{m}{b};\frac{r}{a}\left(1-\frac{m}{bk}\right)\right)$
)




x ' = r x (1 - x/k) - a x y
y ' = - m y + b x y
r = 1   m = 2   k = 3
b = 1   a = 0.5
y
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4