Systèmes dynamiques en biologie

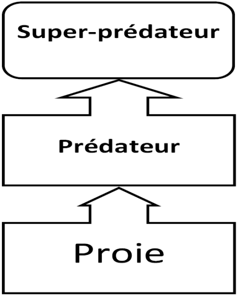
Chapitre 1: Systèmes continus et dynamique des populations
Cours N°4: Modèles de Communauté

Mohammed Salah Abdelouahab

MI

Modèles de communauté

En écologie, une communauté est un ensemble d'organismes appartenant à des populations d'espèces différentes constituant un réseau de relations. Le cas le plus simple est celui d'une proie, d'un prédateur et d'un super-prédateur qui mange le prédateur, on parle alors d'une chaine trophique à trois niveaux. Un modèle simple est basé sur celui de Lotka-Volterra avec des fonctions réponses de type I et en faisant l'hypothèse que le super-prédateur obéit à une loi de croissance logistique :



Un modèle de trois populations

$$\begin{cases} \dot{x} = x(r - ay) \\ \dot{y} = y(-m + bx - cz) \\ \dot{z} = sz(1 - \frac{z}{k}) + dyz \end{cases}$$

où: $x(t), y(t)$ et $z(t)$ sont les densités respectives du proie, du prédateur et du super-prédateur au temps t .

En posant: $u = x$, $v = y$, $w = \frac{z}{k}$ et $\tau = st$, on obtient le système:

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = u(\rho - \alpha v) \\ \frac{dv}{d\tau} = v(-\mu + \beta u - \gamma w) \\ \frac{dw}{d\tau} = w(1 - w) + \delta vw \end{cases}$$

avec les relations suivantes : $\rho = \frac{r}{s}, \alpha = \frac{a}{s}, \mu = \frac{m}{s}, \beta = \frac{b}{s}, \gamma = \frac{ck}{s}$ et $\delta = \frac{d}{s}$

Points d'équilibre et stabilité

Les trois plans $u = 0, v = 0, w = 0$ sont isoclines zéros, par conséquent le cadran strictement positif est positivement invariant par le flot .
le système admet deux points d'équilibre l'origine $(0, 0, 0)$ et le point (u^*, v^*, w^*)
avec:
$u^* = \frac{\mu}{\beta} + \frac{\gamma}{\beta}(1 + \frac{\delta\rho}{\alpha}) > 0$
$v^* = \frac{\rho}{\alpha} > 0$
$w^* = 1 + \frac{\delta\rho}{\alpha} > 0.$
Pour étudier la stabilité calculons la matrice Jacobienne :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \rho - \alpha v & -\alpha u & 0 \\ \beta v & -\mu + \beta u - \gamma w & -\gamma v \\ 0 & \delta w & 1 - 2w + \delta v \end{pmatrix}$$

Points d'équilibre et stabilité

On a alors pour l'origine

$$\mathcal{A}(0,0,0) = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

lorsque $\rho > 0, \mu > 0$ alors l'origine est un col .
D'autre part

$$\mathcal{A}(u^*, v^*, w^*) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha u^* & 0 \\ \beta v^* & 0 & -\gamma v^* \\ 0 & \delta w^* & -w^* \end{pmatrix}$$

l'équation caractéristique est donnée par :
$\lambda^3 + w^*\lambda^2 + (\alpha\beta u^* v^* + \alpha\delta v^* w^*)\lambda + \alpha\beta u^* v^* w^* = 0.$
Pour étudier le signe des valeurs propres sans les avoirs calculés on applique le critère de Routh-Hurwitz.

Soit le système différentiel linéaire

$$\dot{X} = AX$$

avec $\det(A) \neq 0$, l'équation caractéristique s'écrit:
$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$
les déterminants d'Hurwitz sont donnés par

$$H_1 = a_1, \;\; \mathcal{H}_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix}, \;\; \mathcal{H}_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$\mathcal{H}_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\ 1 & a_2 & a_4 & \cdots \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_k \end{vmatrix}$$

Dans le cas de dimension n tous les a_j avec $j > n$ sont prés égaux à zéros. l'équilibre 0 est asymptotiquement stable ssi: $\forall k = (1, n); H_k > 0$. (les parties réelles de toutes les valeurs propres sont négatives).

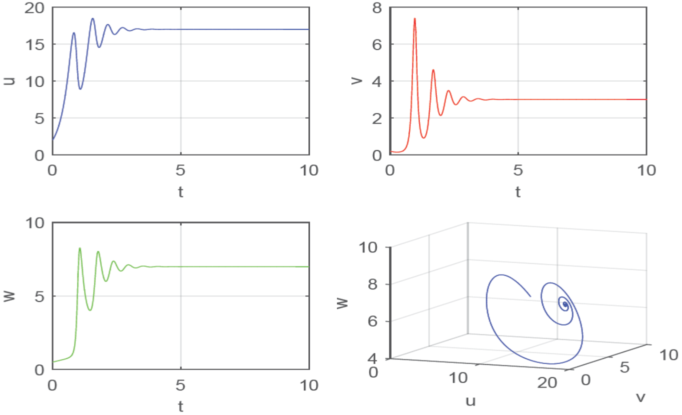
Dans notre modèle on a: $a_1 = w^* > 0$, $a_2 = \alpha\beta u^* v^* + \alpha\delta v^* w^* > 0$ et $a_3 = \alpha\beta u^* v^* w^* > 0$ Alors

$$H_1 = a_1 > 0$$

$$H_2 = a_1 a_2 - a_3 = \alpha\delta v^* w^* > 0$$

$$H_3 = a_3 H_2 > 0$$

D'après le critère de Routh-Hurwitz (u^*, v^*, w^*) est asymptotiquement stable



u
t
v
w
u
v
w