Chapitre 02. Traitement du signal analogique

II-1- Etude des signaux dans le domaine fréquentiel

II-1-1- Séries de Fourier

La décomposition en série de Fourier s'applique aux signaux périodiques. Elle permet de connaitre leur composition fréquentielle. La transformée de Fourier permet Egalement l'étude des signaux dans le domaine fréquentiel, mais s'applique à n'importe quel signal. La décomposition en série de Fourier correspond à une base de fonctions exponentielles.

But : Ecrire une fonction f continue par morceaux et périodique sous la forme :

$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[A_n \cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) + B_n \sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)\right] = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\left[A_n\, cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) + B_n\, sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)\right]$

Ou sous la forme :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n exp^{jn\frac{2\pi}{T}t} = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=-N}^{+N} C_n exp^{jn\frac{2\pi}{T}t}$$

II-1-2 Coefficients de Fourier et séries de Fourier

Définition 1 :

- Coefficients réels de :

$$A_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt \quad n \geq 0$$

$$B_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt \quad n > 0$$

- Coefficients complexes de :

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\exp\left(-jn\frac{2\pi}{T}t\right)dt$$

Remarque :

1- Comme les fonctions sont 2π-périodiques, on peut calculer les intégrales sur n'importe quel intervalle de longueur 2π.
2- X(t) paire ⇒ $B_n = 0$, ∀n > 0 et $A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(t)\, cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt \quad n \geq 0$
3- X(t) impaire ⇒ $A_n = 0$, ∀n > 0 et $B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(t)\sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt \quad n \geq 0$

Définition 2 :

La série

$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}[A_n \cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) + B_n \sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)]$ ou $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_n \exp\left(jn\frac{2\pi}{T}t\right)$

s'appelle série de Fourier associé à f

- La somme partielle de cette série est un polynôme trigonométrique et vaut :

$$S_N(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}[A_n \cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) + B_n \sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)] \text{ Ou } S_N(t) = \sum_{n=-N}^{n=+N} C_n \exp\left(jn\frac{2\pi}{T}t\right)$$

- Si on définit le produit scalaire $[\mathrm{f}, \mathrm{g}] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\overline{g(t)}dt$ alors on a :

$[\mathrm{f}, 1] = \frac{A_0}{2}$; $[\mathrm{f}, \cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)] = \frac{A_N}{2}$; $[\mathrm{f}, \sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)] = \frac{B_N}{2}$; $[\mathrm{f}, \exp s\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)] = C_N$

II-3- Convergence des séries de Fourier

II-3- 1 Convergence en norme quadratique

Théorème de Parseval : f continue par morceaux, 2π périodique ⇒ les sommes partielles S_N converge vers f en norme quadratique c.-à-d. :

lim $_{N\to+\infty}$ ||f − S $\lim\limits_{N\to+\infty} ||f - S_N||^2 = \lim\limits_{N\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t) - S_N|^2 dt = 0$

et on a la formule de Parseval :

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |C_n|^2 = ||f||^2 \frac{|A_0|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(|A_n|^2 + |B_n|^2)$$

II-3- 2 Convergence simple

Théorème de Dirichlet :

f, 2π périodique (non nécessairement continue) ⇒

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[A_n \cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) + B_n \sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)\right] = \begin{cases} f(t) & si\ f\ est\ continue\ en\ x \\ \frac{1}{2}\left(f(t^+) + f(x^-)\right) & si\ f\ est\ discontinue\ en\ x \end{cases}$$

II-3- 4 Non convergence

Si f est seulement continue (ou seulement continue par morceaux), on ne peut rien dire sur la convergence de S_N quand N tend vers +∞, elle peut diverger.

Remarque : f est continue par morceaux si sur tout segment elle est continue sauf en un nombre fini de points de discontinuité t_0 où elle admet une discontinuité de 1`ere espèce cad $\lim_{t0^+} f$ et $\lim_{t0^-} f$ existent mais diffèrent de $f(x_0)$.

II-4 Transformée de Fourrier

II-4-1- Définition et propriétés

a) Définitions

La transformée de Fourier du signal x(t) est définie par :

$$X(f) = F\big(x(t)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

Il s'agit d'une fonction complexe **:**

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)(\cos\omega t - j\sin\omega t)\,dt \quad = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos\omega t\,dt - j\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin\omega t\,dt$$

$$= Re - jIm$$

Le module de ce complexe est appelé spectre d'amplitude, spectre de fréquence ou plus simplement spectre :

$$|X(f)| = \sqrt{Re^2 - Im^2}$$

La phase de ce complexe est appelée spectre de phase :

$$\varphi_n = arctg(-\frac{Im}{Re})$$

La partie réelle est une fonction paire, la partie imaginaire une fonction impaire.

- ***Transformée inverse***

La transformée inverse est définie par :

$$s(t) = F^{-1}\big(S(f)\big) = \int_{f=-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft}dt$$

- ***Condition d'application***

La transformée de Fourier n'existe que si le signal est tel que :

$$\int_{t=-\infty}^{+\infty} |X(t)|dt < \infty$$

Il s'agit des signaux dits "absolument sommables". On peut démontrer que cette condition est également vérifiée par les signaux dits "de carré sommables", c'est à dire les signaux à énergie finie. C'est le cas de tous les signaux physiques puisqu'on les observe toujours sur un temps fini.

b) Propriétés

- ***Linéarité***

Soient x(t) et y(t) deux signaux et X(f) et Y(f) leur transformée, respectivement.

$$a.x(t) + b.y(t) \leftrightarrow^{TF} \; a.X(f) + b.Y(f)$$

- ***Parité***

Dans le cas d'un signal réel :

- ✓ Si x(t) est une fonction paire, alors X(f) est une fonction paire et réelle.
- ✓ Si x(t) est une fonction impaire, alors X(f) est une fonction impaire et imaginaire.
- ✓ Si x(t) n'est ni paire ni impaire, alors X(f) comporte une partie réelle paire et une partie imaginaire impaire.

On peut également considérer le cas d'un signal complexe, possédant donc une partie réelle et une partie imaginaire, qui est un cas abstrait, mais ici on se limitera aux signaux réels.

- ***Homothétie***

$$x(at) \leftrightarrow^{TF} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right), a \in \mathcal{R}$$

et notamment :

$$\mathrm{x}(-\mathrm{t}) \;\; \leftrightarrow^{TF} X(-f\,)$$

- ***Dualité***

Si X(f) = F[x(t)], alors F[X(t)] = x (−f) et réciproquement.

La propriété de translation ci-dessous illustre cette propriété.

- ***Translation***

a) temporelle

$$x(t-a) \leftrightarrow^{TF} X(f)e^{-j2\pi af}\;, \qquad avec\; a \in \mathcal{R}$$

b) fréquentielle

$$x(t)e^{j2\pi af} \leftrightarrow^{TF} X(f-a)\,, \qquad avec\; a \in \mathcal{R}$$

Ces propriétés s'appliquent par exemple au spectre d'une fonction sinus (c'est une série de Fourier mais ces propriétés sont valables) à partir de la fonction cosinus, puisque l'une représente une translation temporelle de l'autre.

- ***Dérivation***

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow^{TF} (2j\pi f)X(f)$$
$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \leftrightarrow^{TF} (2j\pi f)^n . X(f)$$

Théorème de Perseval (Bessel-Parseval)

Le théorème de Perseval traduit le fait que l'énergie contenue dans un signal ne dépend pas du mode de représentation de ce signal : temporel ou fréquentiel.

$$\int_{t=-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt \quad \int_{f=-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 dt$$

Ici on considère que le signal x(t) est un réel, mais sa transformée de Fourier est complexe donc on utilise son module. Si on avait considéré un signal complexe, on aurait utilisé son module également.

- ***Densité spectrale de puissance***

La puissance instantanée exprimée en fonction de la fréquence est appelée densité spectrale de puissance :

$$|X(f)|^2$$

II.4.2. Transformée de quelques signaux courants

X(t)	**X(f)=F[x(t)]**
$\boldsymbol{\delta(t)}$	**1**
1	$\boldsymbol{\delta(f)}$
S(t)=cos $\boldsymbol{(2\pi f_0 t)}$	$\boldsymbol{\frac{1}{2}[\delta(f+f_0)+\delta(f-f_0)]}$
S(t)=sin $\boldsymbol{(2\pi f_0 t)}$	$\boldsymbol{\frac{j}{2}[\delta(f+f_0)-\delta(f-f_0)]}$
Rect $\boldsymbol{[\frac{t}{T}]}$	**T sinc (Tf)**

Tri $[\frac{t}{T}]$	**T** $\boldsymbol{sinc}^{2}$**(Tf)**
$\boldsymbol{\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)}$	$\boldsymbol{\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{n}{T}) = \frac{1}{T}\delta_{\frac{1}{T}}(f)}$

II-5 Convolution

II-5-1- Produit tensoriel

Soient f et g deux fonctions. On appelle produit tensoriel (ou produit direct) de f par g la fonction h : $R^2 \to R$ définie par h(x, y) = f(x) g(y) pour tous (x, y) appartenant à R^2. On note alors $h = f \times g$.

II-5-2- Produit de Convolution

II-5-2-1- Convolution de deux fonctions

Soient f et g deux fonctions localement sommables. On définit, s'il existe, le produit de convolution h de f et g par

$$h(t) = \int f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Pour tout t appartenant à R. On note alors $h = f * g$.

Remarque : Ce produit de convolution n'existe pas toujours. Ce produit est commutatif dès lors qu'il est défini.

Donnons une interprétation graphique de ce produit de convolution. Soit k le produit tensoriel de f par g ; $k = f \times g$. On a alors

$$(f * g)(t) = \int f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int k\,(\tau, t-\tau)d\tau$$

C'est-à-dire qu'on intègre la fonction k sur le chemin formé par la droite D_x de pente −1 et passant par (0, t).