CHAPITRE 5

LES MATHÉMATIQUES EN ORIENT MUSULMAN ET EN OCCIDENT MUSULMAN.

Les mathématiques de l'âge d'or de l'islam, en particulier aux 9e et 10e siècles, ont été construites à partir de synthèses des mathématiques grecques (Euclide, Archimède, Apollonius) et indiennes (Aryabhata, Brahmagupta). Parmi les développements importants de cette période, on peut citer l'extension du système des valeurs de place aux fractions décimales, l'étude systématisée de l'algèbre et les progrès de la géométrie et de la trigonométrie[1].
Le monde islamique médiéval a connu d'importants développements en mathématiques. Muhammad ibn Musa al-Khwārizmī a joué un rôle clé dans cette transformation, en introduisant l'algèbre en tant que domaine distinct au 9e siècle. L'approche d'Al-Khwārizmī, qui s'écarte des traditions arithmétiques antérieures, a jeté les bases de l'arithmétisation de l'algèbre, influençant la pensée mathématique pendant une longue période. Des successeurs comme Al-Karaji ont développé son travail, contribuant à des avancées dans divers domaines mathématiques. Le caractère pratique et la large applicabilité de ces méthodes mathématiques ont facilité la diffusion des mathématiques arabes en Occident, contribuant ainsi de manière substantielle à l'évolution des mathématiques occidentales[2].

Le savoir mathématique arabe s'est répandu par divers canaux au cours de l'ère médiévale, sous l'impulsion des applications pratiques des méthodes d'Al-Khwārizmī. Cette diffusion a été influencée non seulement par des facteurs économiques et politiques, mais aussi par des échanges culturels, illustrés par des événements tels que les croisades et le mouvement de traduction. L'âge d'or islamique, qui s'étend du VIIIe au XIVe siècle, a marqué une période de progrès considérables dans diverses disciplines scientifiques, attirant des savants de l'Europe médiévale désireux d'accéder à ces connaissances. Les routes commerciales et les interactions culturelles ont joué un rôle crucial dans l'introduction des idées mathématiques arabes en Occident. La traduction de textes mathématiques arabes, ainsi que d'ouvrages grecs et romains, entre le 14e et le 17e siècle, a joué un rôle essentiel dans la formation du paysage intellectuel de la Renaissance.

Origine et diffusion des mathématiques arabo-islamiques

Les mathématiques arabes, en particulier l'algèbre, se sont considérablement développées au cours de la période médiévale. Les travaux de Muhammad ibn Musa al-Khwārizmī (arabe : ; v. 780 - v. 850) entre 813 et 833 ap. J.-C. à Bagdad ont marqué un tournant. Il introduit le terme "algèbre" dans le titre de son livre, "Kitab al-jabr wa al-muqabala", marquant ainsi l'existence d'une discipline distincte. Il considérait son ouvrage comme "un court travail sur le calcul par (les règles de) la complétion et de la réduction, se limitant à ce qui est le plus facile et le plus utile dans l'arithmétique"[3] Plus tard, les gens ont fait remarquer que son travail n'était pas seulement un traité théorique mais aussi pratique, visant à résoudre des problèmes dans des domaines tels que le commerce et la mesure de la terre.

L'approche d'Al-Khwārizmī était novatrice en ce sens qu'elle ne découlait d'aucune tradition "arithmétique" antérieure, y compris celle de Diophante. Il a développé un nouveau vocabulaire pour l'algèbre, faisant la distinction entre les termes purement algébriques et ceux partagés avec l'arithmétique. Al-Khwārizmī a remarqué que la représentation des nombres est cruciale dans la vie quotidienne. Il a donc voulu trouver ou résumer un moyen de simplifier l'opération mathématique, appelée plus tard l'algèbre[3]. Son algèbre s'est d'abord concentrée sur les équations linéaires et quadratiques et sur l'arithmétique élémentaire des binômes et des trinômes. Cette approche, qui consistait à résoudre des équations à l'aide de radicaux et de calculs algébriques connexes, a influencé la pensée mathématique longtemps après sa mort.

La démonstration par Al-Khwārizmī de la règle de résolution des équations quadratiques de la forme ($ax^2 + bx = c$), communément appelée « le carré plus la racine égale le nombre », est une réalisation monumentale dans l'histoire de l'algèbre. Cette percée a jeté les bases de l'approche systématique de la résolution des équations quadratiques, qui est devenue un aspect fondamental de l'algèbre telle qu'elle s'est développée dans le monde occidental[4]. La méthode d'Al-Khwārizmī, qui consiste à compléter le carré, a non seulement fourni une solution pratique pour les équations de ce type, mais a également introduit une approche abstraite et généralisée des problèmes mathématiques. Son travail, résumé dans son texte fondateur « Al-Kitab al-Mukhtasar fi Hisab al-Jabr wal-Muqabala » (Le livre compendieux sur le calcul par complétion et équilibrage), a été traduit en latin au 12e siècle. Cette traduction a joué un rôle essentiel dans la transmission des connaissances algébriques à l'Europe, influençant considérablement les mathématiciens de la Renaissance et façonnant l'évolution des mathématiques modernes[4]. Les contributions d'Al-Khwārizmī, en particulier sa preuve pour les équations quadratiques, témoignent du riche patrimoine mathématique du monde islamique et de son impact durable sur les mathématiques occidentales.

La diffusion des mathématiques arabes en Occident a été facilitée par plusieurs facteurs. Le caractère pratique et l'applicabilité générale des méthodes d'al-Khwārizmī étaient importants. Elles étaient conçues pour convertir des problèmes numériques ou géométriques en équations de forme normale, conduisant à des formules de solutions canoniques. Ses travaux et ceux de ses successeurs comme al-Karaji ont jeté les bases de progrès dans divers domaines mathématiques, notamment la théorie des nombres, l'analyse numérique et l'analyse diophantienne rationnelle.

L'algèbre d'Al-Khwārizmī était une discipline autonome avec sa propre perspective historique, conduisant finalement à l'« arithmétisation de l'algèbre ». Ses successeurs ont

développé son travail, l'adaptant à de nouveaux défis théoriques et techniques et le réorientant vers une direction plus arithmétique pour le calcul algébrique abstrait.
Les mathématiques arabes, incarnées par les travaux d'al-Khwārizmī, ont joué un rôle crucial dans la formation du paysage mathématique. Leur diffusion en Occident a été favorisée par leurs applications pratiques, l'expansion des concepts mathématiques par ses successeurs, ainsi que la traduction et l'adaptation de ces idées dans le contexte occidental. Cette diffusion a été un processus complexe impliquant l'économie, la politique et les échanges culturels, qui a grandement influencé les mathématiques occidentales.
La période connue sous le nom d'âge d'or islamique (du 8e au 14e siècle) a été caractérisée par des avancées significatives dans divers domaines, dont les mathématiques. Les savants du monde islamique ont apporté des contributions substantielles aux mathématiques, à l'astronomie, à la médecine et à d'autres sciences. En conséquence, les réalisations intellectuelles des savants islamiques ont attiré l'attention des savants de l'Europe médiévale qui cherchaient à accéder à cette richesse de connaissances. Les routes commerciales, telles que la route de la soie, ont facilité la circulation des marchandises, des idées et des connaissances entre l'Orient et l'Occident. Des villes comme Bagdad, Le Caire et Cordoue sont devenues des centres d'apprentissage et ont attiré des savants d'horizons culturels différents. C'est ainsi que les connaissances mathématiques du monde islamique sont arrivées en Europe par différents canaux. Parallèlement, les croisades ont permis aux Européens de l'Ouest d'entrer en contact avec le monde islamique. Si l'objectif premier des croisades était militaire, elles ont également donné lieu à des échanges culturels et à une exposition aux connaissances islamiques, y compris les mathématiques. Les érudits européens qui se sont rendus en Terre sainte et dans d'autres parties du monde islamique ont eu accès à des manuscrits arabes et à des traités de mathématiques. Entre le 14e et le 17e siècle, la traduction de textes mathématiques arabes, ainsi que de textes grecs et romains, a joué un rôle crucial dans la formation du paysage intellectuel de la Renaissance. Des personnages comme Fibonacci, qui ont étudié en Afrique du Nord et au Moyen-Orient, ont contribué à introduire et à populariser les chiffres arabes et les concepts mathématiques en europe.
Concepts
Les équations cubiques et les intersections de sections coniques" d'Omar Khayyám, première page du manuscrit à deux chapitres conservé à l'université de Téhéran.
Algèbre
L'étude de l'algèbre, dont le nom est dérivé du mot arabe signifiant "achèvement" ou "réunion de parties brisées"[6], a prospéré pendant l'âge d'or islamique. Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi, un érudit persan de la Maison de la sagesse de Bagdad, a été le fondateur de l'algèbre et est, avec le mathématicien grec Diophante, connu comme le père de l'algèbre. Dans son ouvrage intitulé The Compendious Book on Calculation by Completion and Balancing, Al-Khwarizmi traite des moyens de résoudre les racines positives des équations polynomiales du premier et du second degré (linéaires et quadratiques). Il introduit la méthode de réduction et, contrairement à Diophante, donne également des solutions générales pour les équations qu'il traite.

L'algèbre d'Al-Khwarizmi est rhétorique, ce qui signifie que les équations sont écrites en phrases complètes. Elle se distingue de l'algèbre de Diophante, qui est syncopée, c'est-à-dire qu'elle fait appel à un certain symbolisme. La transition vers l'algèbre symbolique, où seuls des symboles sont utilisés, peut être observée dans les travaux d'Ibn al-Banna'

al-Marrakushi et d'Abū al-áasan ibn Alī al-Qalaáādī.
Plusieurs autres mathématiciens de cette époque ont développé l'algèbre d'Al-Khwarizmi. Abu Kamil Shuja' a écrit un livre d'algèbre accompagné d'illustrations géométriques et de preuves. Il a également énuméré toutes les solutions possibles à certains de ses problèmes. Abu al-Jud, Omar Khayyam et Sharaf al-Dīn al-Tūsī ont trouvé plusieurs solutions à l'équation cubique. Omar Khayyam a trouvé la solution géométrique générale d'une équation cubique[citation nécessaire].

Equations cubiques

Pour résoudre l'équation du troisième degré $x^3 + a^2x = b$, Khayyám a construit la parabole $x^2 = ay$, un cercle de diamètre b/a^2 et une ligne verticale passant par le point d'intersection. La solution est donnée par la longueur du segment de droite horizontale allant de l'origine à l'intersection de la droite verticale et de l'axe des x. Plus d'informations : Équation cubique Omar Khayyam (v. 1038/48 en Iran - 1123/24) a écrit le Traité de démonstration des problèmes d'algèbre contenant la solution systématique d'équations cubiques ou du troisième ordre, allant au-delà de l'algèbre d'al-Khwārizmī. Khayyám a obtenu les solutions de ces équations en trouvant les points d'intersection de deux sections coniques. Cette méthode avait été utilisée par les Grecs, mais ils ne l'avaient pas généralisée pour couvrir toutes les équations à racines positives.

Sharaf al-Dīn al-Tusi (de Tus, Iran - 1213/4) a mis au point une nouvelle approche de l'étude des équations cubiques, qui consiste à trouver le point où un polynôme cubique obtient sa valeur maximale. Par exemple, pour résoudre l'équation

$x = \sqrt{\frac{b}{3}}$, et que l'équation n'aurait aucune solution, une solution ou deux solutions, selon que la hauteur de la courbe en ce point était inférieure, égale ou supérieure à a. Les travaux qu'il a conservés ne donnent aucune indication sur la manière dont il a découvert ses formules pour les maxima de ces courbes. Diverses conjectures ont été proposées pour expliquer sa découverte.

Induction

Les premières traces implicites de l'induction mathématique se trouvent dans la preuve d'Euclide que le nombre de nombres premiers est infini (vers 300 avant notre ère). La première formulation explicite du principe d'induction a été donnée par Pascal dans son Traité du triangle arithmétique (1665). Entre-temps, la preuve implicite par induction pour les séquences arithmétiques a été introduite par al-Karaji (vers l'an 1000) et poursuivie par al-Samaw'al, qui l'a utilisée pour démontrer que le nombre de nombres premiers est infini. 1000) et poursuivie par al-Samaw'al, qui l'a utilisée pour des cas particuliers du théorème binomial et des propriétés du triangle de Pascal.

Nombres irrationnels

Les Grecs avaient découvert les nombres irrationnels, mais ils n'en étaient pas satisfaits et n'ont pu s'en sortir qu'en établissant une distinction entre la magnitude et le nombre. Pour les Grecs, les grandeurs varient continuellement et peuvent être utilisées pour des entités telles que les segments de ligne, alors que les nombres sont discrets. Par conséquent, les irrationnels ne pouvaient être traités que géométriquement ; et de fait, les mathématiques grecques étaient principalement géométriques. Les mathématiciens islamiques, dont Abū Kāmil Shujā ibn Aslam et Ibn Tahir al-Baghdadi, ont peu à peu supprimé la distinction entre grandeur et nombre, permettant aux quantités irrationnelles d'apparaître comme coefficients dans des équations et d'être des solutions d'équations algébriques. Ils ont travaillé librement avec les irrationnels en tant qu'objets mathématiques, mais ils n'ont pas

examiné de près leur nature.
Au XIIe siècle, les traductions latines de l'Arithmétique d'Al-Khwarizmi sur les chiffres indiens ont introduit dans le monde occidental le système de numération décimale de position ; son Compendious Book on Calculation by Completion and Balancing a présenté la première solution systématique des équations linéaires et quadratiques. Dans l'Europe de la Renaissance, il a été considéré comme l'inventeur original de l'algèbre, bien que l'on sache aujourd'hui que son travail est basé sur des sources indiennes ou grecques plus anciennes. Il a révisé la Géographie de Ptolémée et a écrit sur l'astronomie et l'astrologie. Cependant, C.A. Nallino suggère que l'œuvre originale d'al-Khwarizmi n'était pas basée sur Ptolémée mais sur une carte du monde dérivée, probablement en syriaque ou en arabe.

Trigonométrie sphérique

La loi des sinus sphériques a été découverte au 10e siècle : elle a été attribuée à Abu-Mahmud Khojandi, Nasir al-Din al-Tusi et Abu Nasr Mansur, avec Abu al-Wafa' Buzjani comme contributeur. [Le livre d'Ibn Muādh al-Jayyānī, Le livre des arcs inconnus d'une sphère, publié au XIe siècle, introduit la loi générale des sinus. La loi plane des sinus a été décrite au XIIIe siècle par Nasīr al-Dīn al-Tūsī. Dans son ouvrage intitulé Sur la figure du secteur, il énonce la loi des sinus pour les triangles plans et sphériques et fournit des preuves de cette loi.

Nombres négatifs

Au 9e siècle, les mathématiciens islamiques connaissaient les nombres négatifs grâce aux travaux des mathématiciens indiens, mais la reconnaissance et l'utilisation des nombres négatifs à cette époque sont restées timides. Al-Khwarizmi n'a pas utilisé de nombres négatifs ou de coefficients négatifs. Mais en l'espace de cinquante ans, Abu Kamil a illustré les règles de signes pour l'expansion de la multiplication $(a \pm b)(c \pm d)$ Al-Karaji a écrit dans son livre al-Fakhrī que "les quantités négatives doivent être comptées comme des termes". [Au 10e siècle, Abū al-Wafā' al-Būzjānī considérait les dettes comme des nombres négatifs dans A Book on What Is Necessary from the Science of Arithmetic for Scribes and Businessmen (Livre sur ce qui est nécessaire à la science de l'arithmétique pour les scribes et les hommes d'affaires).
Au 12e siècle, les successeurs d'al-Karaji devaient énoncer les règles générales des signes et les utiliser pour résoudre les divisions polynomiales. Comme l'écrit al-Samaw'al, "le produit d'un nombre négatif - al-nāqiá - par un nombre positif - al-zāid - est négatif :

le produit d'un nombre négatif - al-nāqis - par un nombre positif - al-zāid - est négatif, et par un nombre négatif est positif. Si l'on soustrait un nombre négatif d'un nombre négatif supérieur, le reste est leur différence négative. La différence reste positive si l'on soustrait un nombre négatif d'un nombre négatif inférieur. Si l'on soustrait un nombre négatif d'un nombre positif, le reste est leur somme positive. Si l'on soustrait un nombre positif d'une puissance vide (martaba khāliyya), le reste est le même négatif, et si l'on soustrait un nombre négatif d'une puissance vide, le reste est le même positif. **Double fausse position**

Entre le 9e et le 10e siècle, le mathématicien égyptien Abu Kamil a écrit un traité, aujourd'hui perdu, sur l'utilisation de la double fausse position, connu sous le nom de Livre des deux erreurs (Kitāb al-khaáāayn). Le plus ancien écrit du Moyen-Orient sur la double fausse position est celui de Qusta ibn Luqa (Xe siècle), un mathématicien arabe de Baalbek, au Liban. Il justifie la technique par une preuve géométrique formelle de type euclidien. Dans la tradition des mathématiques musulmanes de l'âge d'or, la double fausse position était connue sous le nom de hisāb al-khaáāāayn ("calcul par deux erreurs"). Il a été utilisé pendant des siècles pour résoudre des problèmes pratiques tels que des questions commerciales et juridiques (partage des biens selon les règles de l'héritage coranique), ainsi que des problèmes purement récréatifs. L'algorithme était souvent mémorisé à l'aide de moyens mnémotechniques, comme un verset attribué à Ibn al-Yasamin et des diagrammes de balance expliqués par al-Hassar et Ibn al-Banna, tous deux mathématiciens d'origine marocaine.

Conclusion Le monde arabo-musulman médiéval a joué un rôle crucial dans la trajectoire des mathématiques, les innovations algébriques d'al-Khwārizmī servant de pierre angulaire. La diffusion des mathématiques grecques en Occident pendant l'âge d'or islamique, facilitée par les échanges culturels et les traductions, a laissé un impact durable sur la pensée mathématique occidentale. Des mathématiciens comme Al-Battānī, Al-Khayyām et Abū Kāmil, avec leurs contributions à la trigonométrie, à l'algèbre et à la géométrie, ont étendu leur influence au-delà de leur époque. Malgré les contributions fondamentales des mathématiciens arabes, les historiens occidentaux du XVIIIe siècle et du début du XIXe siècle, influencés par des points de vue orientalistes, ont parfois marginalisé ces réalisations. L'Orient manquant de rationalité et d'esprit scientifique a perpétué une perspective biaisée, empêchant la reconnaissance du rôle significatif joué par les mathématiques arabes dans le développement de l'algèbre et d'autres disciplines mathématiques. Pour réévaluer l'histoire des mathématiques, il faut reconnaître l'interconnexion des diverses traditions mathématiques et dissiper l'idée d'un héritage mathématique uniquement européen. Les contributions des mathématiciens arabes, marquées par des applications pratiques et des innovations théoriques, font partie intégrante de la riche tapisserie de l'histoire des mathématiques et méritent d'être reconnues.