
CHAPITRE 4

MATHÉMATIQUES GRECQUES

Les mathématiques grecques désignent l'étude systématique des mathématiques qui a vu le jour dans la Grèce antique au cours de la seconde moitié du premier millénaire avant notre ère, marquée par l'accent mis sur les mathématiques pures et la recherche de la beauté mathématique. Cette période a vu le passage des applications pratiques des mathématiques, principalement utilisées pour la survie dans les économies de subsistance, à une exploration plus approfondie des concepts mathématiques, grâce à la prospérité des cités-États grecques et à l'échange d'idées par le biais du commerce. Des pionniers comme Thalès de Milet ont introduit le raisonnement déductif en géométrie, tandis que Pythagore et ses disciples ont lié les mathématiques à la musique et à la philosophie, établissant des concepts fondamentaux dans la théorie des nombres.

L'ouvrage fondateur d'Euclide, « Les éléments », a établi une approche structurée de la géométrie, influençant les mathématiques pour les siècles à venir. Archimède a fait progresser les mathématiques pures et appliquées, apportant des contributions significatives qui ont précédé le calcul. L'héritage des mathématiques grecques comprend également des figures notables telles qu'Ératosthène, qui a calculé la circonférence de la Terre, et Hypatie, l'une des premières femmes mathématiciennes répertoriées. Malgré le déclin de la civilisation grecque, les principes mathématiques élaborés à cette époque ont jeté les bases des progrès futurs, faisant des mathématiques grecques une pierre angulaire de la pensée occidentale.

Les historiens des mathématiques et les ethnomathématiciens ont noté que nous ne savons pas ce que les premières civilisations ont fait en mathématiques. Toutefois, d'après les éléments dont nous disposons, il semble que la Grèce antique, dans la seconde moitié du premier millénaire avant notre ère, ait été la première civilisation connue à étudier spécifiquement les mathématiques pures, c'est-à-dire les mathématiques pour elles-mêmes, les mathématiques en tant qu'esthétiquement belles. Il existe des exemples occasionnels de mathématiques pures dans les civilisations antérieures, notamment les proportions mathématiques dans l'art et le design en Égypte et ailleurs, mais les peuples antérieurs utilisaient les mathématiques principalement pour des applications pratiques, même si ces applications étaient liées à la religion et à l'art.

La plupart des civilisations antérieures avaient des économies de subsistance, où la réussite

de la vie dépendait de la production de nourriture et d'un abri, et la pensée mathématique était donc utilisée pour contribuer à ces fins. La vie était difficile pour la plupart des gens et exigeait une concentration de tous les instants, de sorte qu'il y avait peu de temps pour la détente qui aurait permis de contempler les relations mathématiques comme de la beauté. Cependant, en 600 et 500 avant J.-C., la Grèce était devenue prospère, avec de solides marchés et des liens commerciaux autour de la Méditerranée orientale. Il y avait des travaux de subsistance à effectuer, mais l'élite de la classe supérieure n'avait pas ces responsabilités et pouvait consacrer du temps à la philosophie et à l'apprentissage pour eux-mêmes. Le commerce apportait également des idées d'autres régions, et les places de marché ouvertes encourageaient l'échange d'idées et la défense des siennes. Ces rencontres ont ouvert la voie à l'étude des mathématiques au-delà de leur utilisation quotidienne, ainsi qu'à l'idée de déduction pour prouver des affirmations.

Les premiers mathématiciens grecs

L'un des premiers mathématiciens connus par son nom est Thalès de Milet (624-547 av. J.-C.), dans l'actuelle Turquie. Il a été l'un des premiers à utiliser la déduction formelle en géométrie et il est connu pour avoir démontré plusieurs propriétés géométriques de base : qu'un diamètre coupe un cercle, que les angles de base d'un triangle isocèle sont égaux et que les angles verticaux formés par l'intersection de lignes sont égaux. Il a également utilisé les congruences angle-côté-angle et angle-côté-triangle et a montré qu'un angle inscrit dans un demi-cercle est toujours un angle droit. En géométrie pratique, il a reconnu que l'étoile polaire (Polaris) pouvait être utilisée pour la navigation et, plus impressionnant encore, on dit qu'il a prédit une éclipse de soleil en 585 avant notre ère (bien que certains en doutent). Il était également homme d'affaires et achetait des moulins à huile lorsque ses prédictions annonçaient une bonne année pour les olives.

Pythagore (572-497 av. J.-C.) est plus célèbre et, pour beaucoup, plus intéressant. Après avoir voyagé dans sa jeunesse, il s'est installé à Crotona (dans ce qui est aujourd'hui le sud-est de l'Italie) et a rassemblé des adeptes au sein d'une organisation secrète, semblable à une secte, d'adorateurs des nombres. Ils croyaient que les nombres entiers et les rapports de nombres entiers étaient au cœur de tout - les nombres régissent l'univers ! Ils étudiaient la géométrie, l'astronomie et la musique, mais reliaient tout aux nombres (notamment en remarquant qu'une corde pincée sonne une octave plus haut lorsqu'elle est deux fois plus longue, et que d'autres fractions courantes de la longueur produisent également des sons harmoniques). Leur culte les a conduits aux prémices de la théorie des nombres en étudiant les nombres pairs et impairs, les nombres premiers et les nombres figurés (nombres d'objets disposés en carrés, en triangles ou en d'autres formes). Certaines des questions de la théorie des nombres qu'ils ont étudiées restent des problèmes non résolus, même au début du XXI^e siècle.

Les mathématiques les plus célèbres liées à Pythagore et à son groupe sont le théorème de la relation entre les longueurs des côtés et de l'hypoténuse des triangles rectangles. D'autres, notamment les Égyptiens et les Babyloniens, ont également reconnu cette relation, au moins dans des cas simples tels que le triangle 3-4-5 pour les Égyptiens, d'autres triangles de ce type pour les Babyloniens et, indépendamment, les Chinois. Cependant, les Pythagoriciens ont probablement été les premiers à prouver la relation en général, et c'est pourquoi, dans les mathématiques occidentales, on l'appelle le théorème de Pytha-

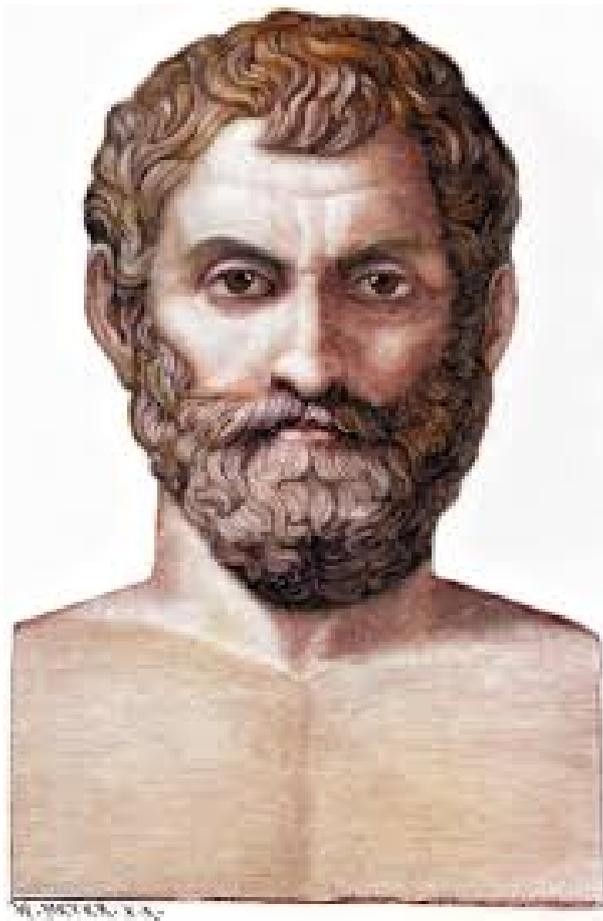


FIGURE 4.1 – Thales

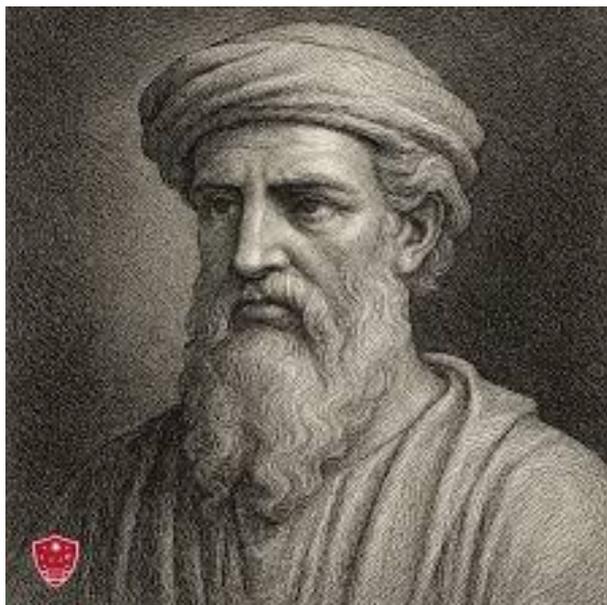


FIGURE 4.2 – Pythagore

gore $a^2 + b^2 = h^2$, où a et b sont les longueurs des jambes du triangle droit avec l'angle droit entre elles, et h est la longueur de l'hypoténuse de l'autre côté de l'angle droit. Ce théorème a été décrit comme le premier théorème non évident des mathématiques.

L'exemple le plus simple du théorème de Pythagore est un triangle droit dont chaque pied mesure une unité. Malheureusement pour les pythagoriciens qui adorent les nombres entiers, la racine carrée de 2 ne peut jamais être exprimée comme le rapport de deux nombres entiers. Aujourd'hui, on l'appelle un « nombre irrationnel », avec une expansion décimale infinie et non répétitive. Un nombre irrationnel est contraire aux croyances des pythagoriciens - une contradiction si grave qu'ils ont gardé ce résultat secret. Plus généralement, la question des nombres irrationnels a provoqué une crise dans les mathématiques grecques. Certains ont même attribué ce problème à l'évolution générale des mathématiques grecques, qui sont passées des nombres à une géométrie de base n'utilisant pas de mesures. La géométrie des Grecs est devenue une géométrie qui permettait de construire des figures en utilisant uniquement un compas et une règle non marquée.

Trois problèmes de construction

Trois problèmes de construction ont posé un défi aux Grecs et à beaucoup d'autres au cours des siècles suivants. Le premier consistait à construire un carré ayant exactement la même surface qu'un cercle donné, dans l'espoir de trouver les surfaces des formes rondes. Pour ce faire, il fallait trouver un moyen de construire une ligne de unités de long. Un autre problème consistait à construire un cube de volume double de celui d'un cube donné, ce qui nécessitait une ligne de longueur égale à la racine cubique de 2. Le troisième problème demandait une trisection d'un angle donné - la trisection d'un angle était facile, mais ce problème demandait que l'angle soit coupé en trois. Les Grecs n'ont jamais résolu ces problèmes, mais leurs efforts ont abouti à des découvertes intéressantes en géométrie. Les mathématiciens grecs ont été rachetés au dix-neuvième siècle lorsqu'il a été prouvé que les trois constructions étaient impossibles, mais il existe encore des sceptiques qui prétendent à tort avoir produit des preuves pour ces constructions.

Le raisonnement déductif et Euclide

Cette géométrie et l'utilisation d'arguments déductifs sont devenues la norme non seulement des mathématiques, mais aussi de la pensée claire et de la logique. L'Académie de Platon affichait un panneau indiquant que seuls ceux qui connaissaient la géométrie pouvaient entrer - la géométrie déductive était la connaissance préalable à la philosophie, au gouvernement et à la pensée critique dans tous les domaines. La civilisation grecque s'est considérablement développée sous Alexandre le Grand à la fin du quatrième siècle avant notre ère, atteignant l'Afghanistan moderne à l'est et l'Égypte au sud. La ville d'Alexandrie s'est établie à l'embouchure du Nil et est devenue un centre de commerce et un centre d'érudition avec la construction de la bibliothèque (également appelée musée) d'Alexandrie.

L'un des premiers responsables de la bibliothèque fut Euclide (vers 300 av. J.-C.), un mathématicien dont la vie est peu connue, mais dont l'œuvre est l'une des plus publiées de toutes les mathématiques. S'appuyant probablement sur les travaux d'érudits antérieurs, il a mis en place une structure axiomatique et déductive de la géométrie qui est devenue la base de la plupart des recherches mathématiques futures. Il a commencé par cinq postulats qui s'appuient principalement sur les règles de la construction géométrique, plus

quelques vérités évidentes fondamentales et quelques définitions de base. À partir de ces postulats, il a élaboré des preuves déductives de propriétés géométriques supplémentaires.

À partir de ces premiers théorèmes, d'autres déductions ont finalement abouti à un « arbre » d'énoncés prouvés, chacun pouvant être retracé jusqu'aux théorèmes d'origine. Son livre, *Les Éléments*, aurait été publié plus souvent que n'importe quel autre livre, à l'exception de la Bible, et reste encore aujourd'hui le cadre d'introduction à l'étude de la géométrie formelle. Son cinquième postulat ne provenait pas de constructions et définissait les lignes parallèles, ce qui a conduit à l'utilisation difficile de l'infini - notant que les lignes parallèles ne se rencontreraient même pas, quelle que soit la distance à laquelle on les étendrait. Il semble qu'Euclide lui-même ait été préoccupé par la question de l'infini et qu'il ait hésité à utiliser ce postulat aussi longtemps que possible. Deux mille ans plus tard, les remises en question et les modifications du cinquième postulat allaient conduire au développement de géométries non euclidiennes au XIXe siècle.

Archimède

Archimède (287-212 av. J.-C.) est souvent considéré comme le plus grand des mathématiciens grecs de l'Antiquité et l'un des plus grands de toute l'histoire. Contrairement à de nombreux mathématiciens, il a été reconnu de son vivant. Ses réalisations sont d'autant plus remarquables qu'il a travaillé à la fois dans le domaine des mathématiques pures et dans celui des mathématiques appliquées. Dans le domaine des mathématiques pures, Archimède a failli développer le calcul intégral plus de 1800 ans avant Newton et Leibniz. Il voulait trouver des moyens de calculer les surfaces et les volumes de formes rondes et a utilisé l'idée de diviser les formes en très petites tranches, un peu comme les tranches similaires utilisées pour intégrer les surfaces et les volumes dans le calcul. Il a trouvé les volumes de sphères, de cônes et de cylindres et a découvert une relation intéressante lorsque ces formes ont le même diamètre et la même hauteur : les volumes de ces cônes, sphères et cylindres spéciaux forment un rapport de 1 :2 :3.

Utilisant également des techniques proches du calcul, il a trouvé la valeur de π en inscrivant et en circonscrivant des polygones réguliers à l'intérieur et à l'extérieur d'un cercle, puis en augmentant le nombre de côtés des polygones de manière à ce qu'ils se rapprochent et à ce qu'ils évaluent la circonférence du cercle. Il a calculé que la valeur de π était comprise entre $3 \frac{1}{7}$ et $3 \frac{10}{71}$. Pour faciliter le traitement des grands nombres, il a considérablement élargi le système de numération.

Archimède a vécu à Syracuse, sur l'île de Sicile, et ses travaux appliqués étaient souvent liés à sa vie dans cette ville. Il a étudié la mécanique des machines simples telles que les leviers, les poulies et les vis. Il est réputé avoir utilisé certaines de ses connaissances pour aider le roi à repousser une invasion romaine. Un jour, le roi lui a demandé de vérifier l'authenticité de l'or d'une couronne. Il savait qu'il pouvait comparer les densités de l'or pur et d'un alliage, mais pour ce faire, il devait connaître le volume de la couronne de forme très irrégulière. En entrant dans son bain, il a remarqué que le niveau de l'eau montait pour compenser son propre volume ; il a alors compris qu'il pouvait mesurer le volume de la couronne à partir de la quantité d'eau qu'elle déplaçait. L'histoire raconte qu'il sauta hors du bain et courut nu à travers la ville en criant « Eureka ! » (je l'ai trouvé !), excité par sa découverte.

Bien qu'Archimède ait aidé à repousser les Romains, ceux-ci revinrent lorsqu'il fut un vieil homme. La légende raconte qu'il refusa de quitter la géométrie qu'il écrivait dans le sable lorsqu'un soldat romain lui demanda de partir. Face à son refus, le soldat l'a tué. Dans un certain sens, cela est symbolique, car non seulement Archimède est mort de la main d'un soldat romain, mais une grande partie de la civilisation grecque est tombée aux mains de l'Empire romain en pleine expansion. Les Romains étaient de bons ingénieurs et ont construit un réseau de routes et d'aqueducs, mais ils ont surtout utilisé les mathématiques existantes et n'ont pas apporté grand-chose de plus que les travaux des Grecs.

Autres mathématiciens grecs

Cependant, de l'autre côté de la Méditerranée, Alexandrie et sa bibliothèque ne sont pas tombées. À la suite d'Euclide, la bibliothèque d'Alexandrie est restée un centre de mathématiques grecques qui a perduré plusieurs siècles après le déclin de la civilisation grecque dans son ensemble. Une partie des travaux portait sur l'astronomie. Dès 200 avant J.-C., Ératosthène calcule assez précisément la circonférence de la Terre (ce qui indique d'ailleurs qu'il savait que la Terre était ronde) en comparant l'angle du soleil à midi à Alexandrie et à Cyrène et en utilisant des comparaisons géométriques pour effectuer le calcul.

Plus tard, d'autres astronomes grecs, notamment Ptolémée (100-178 av. J.-C.), ont trouvé d'autres mesures des mouvements des planètes. Certains de leurs travaux ont conduit à la croyance erronée que la Terre était le centre du système solaire, mais d'autres études ont fourni une base mathématique solide pour les premières recherches astronomiques.

Trois autres noms de mathématiciens viennent clore l'histoire des mathématiques de la Grèce antique dans les premiers siècles de l'ère commune. Au premier siècle, Hero (également appelé Heron) a conçu un dispositif qui, s'il avait été construit, aurait pu être la première machine à vapeur, mais il n'a pas vu le jour. Il a également trouvé une formule remarquable pour calculer l'aire d'un triangle aléatoire lorsque seules les longueurs des trois côtés (a , b et c) sont données :

$$\text{Area} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$\text{where } s = \frac{a+b+c}{2}$$

FIGURE 4.3 – Formule Herons

le semi-périmètre. Comme le théorème de Pythagore, cette formule est considérée comme l'un des premiers théorèmes non évidents importants et est également utile dans des applications pratiques.

Diophantes, qui a vécu au milieu du troisième siècle, a parfois été appelé le « père de l'algèbre ». Il a rompu avec l'intérêt des Grecs pour la géométrie et a étudié les problèmes numériques avec des techniques qui ressemblent aux méthodes algébriques ultérieures. Il s'est particulièrement intéressé aux problèmes dont les énoncés et les résultats étaient tous des nombres entiers, ce qui restreignait l'éventail des solutions mais offrait des défis qui conduisaient à un travail créatif.

Hypatie (370-415) était célèbre en tant que chercheuse et enseignante en mathématiques à Alexandrie. Hypatie est notamment l'une des premières femmes mathématiciennes importantes connues dans l'histoire. Enseignée à l'origine par son père, qui était également mathématicien, Hypatie a écrit des commentaires et des développements sur des travaux grecs antérieurs, un type courant de recherche mathématique à l'époque. Elle s'est également distinguée en tant qu'enseignante. Cependant, elle fut involontairement prise dans la politique religieuse de son époque et fut capturée et tuée par une foule. Ainsi, deux phases des mathématiques grecques se sont terminées par une mort tragique : Archimède, tué par des soldats romains, a marqué la fin de l'âge d'or des mathématiques grecques, tandis que le meurtre d'Hypatie par la foule a marqué la fin des travaux mathématiques grecs.

Dans l'ensemble, les mathématiques grecques se sont poursuivies pendant près de 1000 ans, offrant un exemple inégalé pour les travaux mathématiques futurs. Les Grecs ont réalisé d'importants travaux dans les domaines appliqués, mais ils sont surtout reconnus pour avoir jeté les bases des mathématiques pures.