CHAPITRE 3

LES MATHÉMATIQUES DE L'EGYPTE ANCIENNE.

L'introduction de l'écriture en Égypte au cours de la période prédynastique (vers 3000 avant notre ère) a entraîné la formation d'une classe spéciale de professionnels lettrés, les scribes. Grâce à leur maîtrise de l'écriture, les scribes ont assumé toutes les fonctions d'un service civil : tenue des registres, comptabilité des impôts, gestion des travaux publics (projets de construction, etc.), et même poursuite de la guerre en supervisant les fournitures militaires et les salaires. Les jeunes gens s'inscrivent dans des écoles de scribes pour apprendre l'essentiel du métier, qui comprend non seulement la lecture et l'écriture, mais aussi les bases des mathématiques.
L'un des textes les plus populaires comme exercice de copie dans les écoles du Nouvel Empire (13e siècle avant notre ère) est une lettre satirique dans laquelle un scribe, Hori, se moque de son rival, Amen-em-opet, pour son incompétence en tant que conseiller et gestionnaire. « Tu es le scribe intelligent à la tête des troupes », lance Hori à un moment donné, . Une rampe doit être construite, longue de 730 coudées, large de 55 coudées, avec 120 compartiments - elle est haute de 60 coudées, 30 coudées au milieu... et les généraux et les scribes se tournent vers toi et te disent : "Tu es un scribe intelligent, ton nom est célèbre. Y a-t-il quelque chose que tu ne saches pas ? Réponds-nous : combien faut-il de briques ?" Que chaque compartiment mesure 30 coudées sur 7 coudées.
Ce problème, et trois autres semblables dans la même lettre, ne peuvent être résolus sans données supplémentaires. Mais le but de l'humour est clair : Hori défie son rival avec ces tâches difficiles, mais typiques.

Ce que l'on sait des mathématiques égyptiennes correspond bien aux tests posés par le scribe Hori. Les informations proviennent principalement de deux longs papyrus qui servaient autrefois de manuels dans les écoles de scribes. Le papyrus Rhind (conservé au British Museum) est une copie réalisée au 17e siècle avant notre ère d'un texte datant de deux siècles plus tôt. On y trouve une longue table de fractions pour aider à la division, suivie des solutions de 84 problèmes spécifiques d'arithmétique et de géométrie. Le papyrus Golenishchev (Musée des Beaux-Arts de Moscou), datant du 19e siècle avant notre ère, présente 25 problèmes du même type. Ces problèmes reflètent bien les fonctions qu'exerçaient les scribes, puisqu'ils traitent, par exemple, de la manière de distribuer la bière et le pain en guise de salaire, et de mesurer les surfaces des champs ainsi que les volumes des pyramides et d'autres solides.

Les Égyptiens, comme les Romains après eux, exprimaient les nombres selon un système décimal, en utilisant des symboles distincts pour 1, 10, 100, 1 000, et ainsi de suite ; chaque symbole apparaissait dans l'expression d'un nombre autant de fois que la valeur qu'il représentait apparaissait dans le nombre lui-même. Par exemple, les mathématiques représentent 24. Cette notation plutôt lourde était utilisée dans l'écriture hiéroglyphique que l'on trouve dans les inscriptions sur pierre et autres textes officiels, mais dans

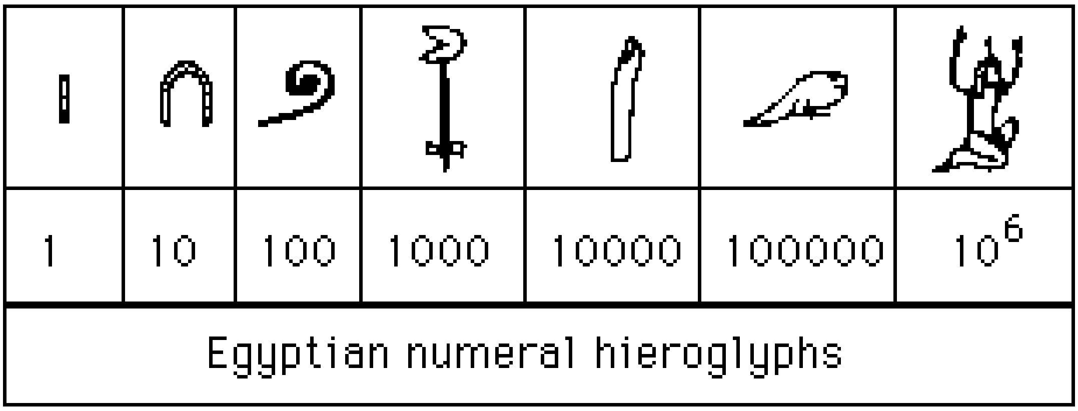

FIGURE 3.1 – Chiffres de l'Égypte ancienne

FIGURE 3.2 – Chiffres de l'Égypte ancienne

Dans un tel système, l'addition et la soustraction reviennent à compter le nombre de symboles de chaque type dans les expressions numériques, puis à les réécrire avec le nombre de symboles obtenu. Les textes qui nous sont parvenus ne révèlent pas quelles procédures spéciales les scribes utilisaient, le cas échéant, pour les aider dans cette tâche. Mais pour la multiplication, ils ont introduit une méthode de doublement successif. Par exemple, pour multiplier 28 par 11, on construit une table de multiples de 28 comme la suivante :

1	28
2	56
4	112
8	224
16	448
...	...

FIGURE 3.3 – Table-multiples

Les différents éléments de la première colonne dont la somme est égale à 11 (c'est-à-dire 8, 2 et 1) sont cochés. Le produit est alors trouvé en additionnant les multiples correspondant à ces entrées ; ainsi, 224 + 56 + 28 = 308, le produit désiré.

Pour diviser 308 par 28, les Égyptiens appliquaient la même procédure à l'envers. En utilisant la même table que dans le problème de la multiplication, on constate que 8 produit le plus grand multiple de 28 inférieur à 308 (car l'entrée à 16 est déjà 448), et on coche 8. Le processus est ensuite répété, cette fois pour le reste (84) obtenu en soustrayant l'entrée à 8 (224) du nombre original (308). Cependant, ce chiffre est déjà plus petit que l'entrée à 4, qui est donc ignorée, mais il est plus grand que l'entrée à 2 (56), qui est alors cochée. Le processus est répété pour le reste obtenu en soustrayant 56 du reste précédent de 84, soit 28, qui est également exactement égal à l'entrée à 1 et qui est alors coché. Les entrées cochées sont additionnées, ce qui donne le quotient : 8 + 2 + 1 = 11 (dans la plupart des cas, bien sûr, il y a un reste inférieur au diviseur).
Pour les nombres plus grands, cette procédure peut être améliorée en considérant les multiples de l'un des facteurs par 10, 20,... ou même par des ordres de grandeur plus élevés (100, 1 000,...), si nécessaire (dans la notation décimale égyptienne, ces multiples sont faciles à calculer). Ainsi, on peut trouver le produit de 28 par 27 en établissant les multiples de 28 par 1, 2, 4, 8, 10 et 20. Comme la somme des entrées 1, 2, 4 et 20 est égale à 27, il suffit d'additionner les multiples correspondants pour trouver la réponse.
Les calculs impliquant des fractions sont effectués en se limitant aux parties unitaires (c'est-à-dire aux fractions qui, en notation moderne, s'écrivent avec 1 comme numérateur). Pour exprimer le résultat de la division de 4 par 7, par exemple, qui en notation moderne est simplement 4/7, le scribe écrivait 1/2 + 1/14. La procédure pour trouver les quotients sous cette forme ne fait qu'étendre la méthode habituelle pour la division des

entiers, où l'on inspecte maintenant les entrées pour 2/3, 1/3, 1/6, etc., et 1/2, 1/4, 1/8, etc., jusqu'à ce que les multiples correspondants du diviseur s'additionnent pour donner le dividende. jusqu'à ce que la somme des multiples correspondants du diviseur corresponde au dividende. (Les scribes ont inclus 2/3, comme on peut le constater, même s'il ne s'agit pas d'une fraction unitaire). Dans la pratique, la procédure peut parfois devenir assez compliquée (par exemple, la valeur de 2/29 est donnée dans le papyrus Rhind comme 1/24 + 1/58 + 1/174 + 1/232) et peut être calculée de différentes manières (par exemple, le même 2/29 peut être trouvé comme 1/15 + 1/435 ou comme 1/16 + 1/232 + 1/464, etc.) Une partie considérable des textes du papyrus est consacrée à des tableaux destinés à faciliter la recherche de ces valeurs de fractions unitaires.
Ces opérations élémentaires suffisent pour résoudre les problèmes arithmétiques des papyrus. Par exemple, « pour diviser 6 pains entre 10 hommes » (papyrus Rhind, problème 3), il suffit de diviser pour obtenir la réponse 1/2 + 1/10. Dans un groupe de problèmes, une astuce intéressante est utilisée : "Une quantité (aha) et son 7e font ensemble 19 - qu'est-ce que c'est ? (papyrus Rhind, problème 24). Ici, on suppose d'abord que la quantité est 7 : comme 11/7 de cette quantité donne 8, et non 19, on prend 19/8 (c'est-à-dire 2 + 1/4 + 1/8), et son multiple par 7 (16 + 1/2 + 1/8) devient la réponse demandée. Ce type de procédure (parfois appelée méthode de la « fausse position » ou de la « fausse hypothèse ») est connu dans de nombreuses autres traditions arithmétiques (chinoises, hindoues, musulmanes et européennes de la Renaissance, par exemple), bien qu'elles ne semblent pas avoir de lien direct avec la tradition égyptienne de l'arithmétique.

Géométrie

Les problèmes géométriques des papyrus cherchent à mesurer des figures, comme des rectangles et des triangles d'une base et d'une hauteur données, au moyen d'opérations arithmétiques appropriées. Dans un problème plus compliqué, on cherche un rectangle dont l'aire est 12 et dont la hauteur est 1/2 + 1/4 fois sa base (papyrus Golenishchev, problème 6). Pour résoudre le problème, le rapport est inversé et multiplié par l'aire, ce qui donne 16 ; la racine carrée du résultat (4) est la base du rectangle, et 1/2 + 1/4 fois 4, soit 3, est la hauteur. L'ensemble du processus est analogue à la résolution de l'équation algébrique du problème (x × 3/4x = 12), mais sans l'utilisation d'une lettre pour l'inconnue. Une procédure intéressante est utilisée pour trouver l'aire du cercle (papyrus Rhind, problème 50) : 1/9 du diamètre est éliminé et le résultat est élevé au carré. Par exemple, si le diamètre est de 9, l'aire est égale à 64. Le scribe a reconnu que l'aire d'un cercle est proportionnelle au carré du diamètre et a supposé pour la constante de proportionnalité (c'est-à-dire /4) la valeur 64/81. Il s'agit d'une assez bonne estimation, avec une surestimation d'environ 0,6 . (Elle n'est cependant pas aussi proche de l'estimation aujourd'hui courante de 31/7, proposée pour la première fois par Archimède, qui n'est trop grande que d'environ 0,04). Mais rien dans les papyrus n'indique que les scribes savaient que cette règle n'était qu'approximative plutôt qu'exacte.
Un résultat remarquable est la règle du volume de la pyramide tronquée (papyrus Golenishchev, problème 14). Le scribe suppose que la hauteur est de 6, que la base est un carré de côté 4 et que le sommet est un carré de côté 2. Il multiplie le tiers de la hauteur par 28, ce qui donne un volume de 56 ; ici, 28 est calculé à partir de 2 × 2 + 2 × 4 + 4 × 4. Comme c'est correct, on peut supposer que le scribe connaissait également la règle générale : A = (h/3)(a2 + ab + b2). La manière dont les scribes ont effectivement dérivé

cette règle est sujette à débat, mais il est raisonnable de supposer qu'ils connaissaient des règles apparentées, telles que celle concernant le volume d'une pyramide : un tiers de la hauteur multiplié par l'aire de la base.
Les Égyptiens utilisaient l'équivalent de triangles semblables pour mesurer les distances. Par exemple, le seked d'une pyramide est indiqué comme le nombre de palmes à l'horizontale correspondant à une élévation d'une coudée (sept palmes). Ainsi, si le seked est de 51/4 et que la base est de 140 coudées, la hauteur devient 931/3 coudées (papyrus Rhind, problème 57). Le sage grec Thalès de Milet (VIe siècle avant notre ère) aurait mesuré la hauteur des pyramides à l'aide de leurs ombres (le rapport provient de Hieronymus, un disciple d'Aristote au IVe siècle avant notre ère). Cependant, à la lumière des calculs du seked, ce rapport doit indiquer un aspect de l'arpentage égyptien qui remonte à au moins 1 000 ans avant l'époque de Thalès.

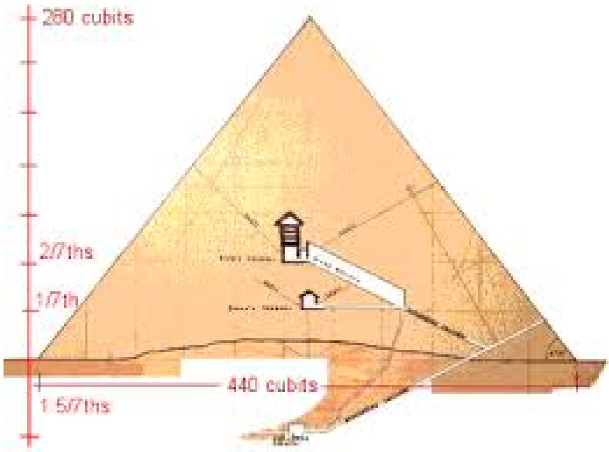

FIGURE 3.4 – Sekeds et la géométrie de la Grande Pyramide

Évaluation des mathématiques égyptiennes
Les papyrus témoignent donc d'une tradition mathématique étroitement liée aux activités pratiques de comptabilité et d'arpentage des scribes. Occasionnellement, les scribes se sont un peu relâchés : un problème (papyrus Rhind, problème 79), par exemple, cherche le total de sept maisons, sept chats par maison, sept souris par chat, sept épis de blé par souris, et sept hekat de grain par épi (résultat : 19.607). L'intérêt du scribe pour les progressions (pour lesquelles il semble avoir une règle) dépasse certainement les considérations pratiques. Pour le reste, cependant, les mathématiques égyptiennes s'inscrivent résolument dans le cadre de la pratique.

Même en tenant compte de l'insuffisance de la documentation qui nous est parvenue, les réalisations égyptiennes en mathématiques doivent être considérées comme modestes. Ses caractéristiques les plus frappantes sont la compétence et la continuité. Les scribes sont parvenus à élaborer les bases de l'arithmétique et de la géométrie nécessaires à l'exercice de leurs fonctions officielles d'administrateurs civils, et leurs méthodes ont perduré sans grand changement apparent pendant au moins un millénaire, voire deux. En effet, lorsque l'Égypte est passée sous domination grecque à l'époque hellénistique (à partir du IIIe siècle avant notre ère), les anciennes méthodes scolaires ont été maintenues. Fait remarquable, les anciennes méthodes d'unités et de fractions sont toujours présentes dans les papyrus

scolaires égyptiens rédigés en démotique (égyptien) et en grec jusqu'au 7e siècle de notre ère, par exemple.
Dans la mesure où les mathématiques égyptiennes ont laissé un héritage, c'est par leur impact sur la tradition mathématique grecque émergente entre le 6e et le 4e siècle avant notre ère. La documentation de cette période étant limitée, on ne peut que conjecturer la manière et l'importance de cette influence. Mais le récit de Thalès mesurant la hauteur des pyramides n'est qu'un exemple parmi d'autres d'intellectuels grecs apprenant des Égyptiens ; Hérodote et Platon décrivent avec approbation les pratiques égyptiennes en matière d'enseignement et d'application des mathématiques. Ces preuves littéraires sont étayées par l'histoire, puisque les Grecs ont continué à mener des opérations commerciales et militaires en Égypte à partir du VIIe siècle avant notre ère. Il est donc plausible que les précédents fondamentaux des premiers efforts mathématiques des Grecs - la manière dont ils traitaient les parties fractionnaires ou mesuraient les surfaces et les volumes, ou leur utilisation des ratios en relation avec des figures similaires - proviennent de l'apprentissage des scribes égyptiens de l'Antiquité.