CHAPITRE 2

LES ORIGINES

Il est important de connaître la nature des sources pour l'étude de l'histoire des mathématiques. L'histoire des mathématiques mésopotamiennes et égyptiennes est basée sur les documents originaux écrits par des scribes. Bien que, dans le cas de l'Égypte, ces documents soient peu nombreux, ils sont tous du même type et ne laissent guère de doute sur le fait que les mathématiques égyptiennes étaient, dans l'ensemble, élémentaires et profondément pratiques dans leur orientation. Pour les mathématiques mésopotamiennes, en revanche, il existe un grand nombre de tablettes d'argile qui révèlent des réalisations mathématiques d'un ordre beaucoup plus élevé que celles des Égyptiens. Les tablettes indiquent que les Mésopotamiens disposaient d'un grand nombre de connaissances mathématiques remarquables, bien qu'elles n'offrent aucune preuve que ces connaissances étaient organisées en un système déductif. Les recherches futures permettront peut-être d'en savoir plus sur les débuts des mathématiques en Mésopotamie ou sur leur influence sur les mathématiques grecques, mais il est probable que cette image des mathématiques mésopotamiennes restera inchangée.

De la période antérieure à Alexandre le Grand, aucun document mathématique grec n'a été conservé, à l'exception de paraphrases fragmentaires, et, même pour la période postérieure, il est bon de rappeler que les plus anciennes copies des Éléments d'Euclide se trouvent dans des manuscrits byzantins datant du Xe siècle de notre ère. Cette situation contraste totalement avec celle décrite ci-dessus pour les documents égyptiens et babyloniens. Bien que, dans ses grandes lignes, la description actuelle des mathématiques grecques soit sûre, dans des domaines aussi importants que l'origine de la méthode axiomatique, la théorie pré-euclidienne des rapports et la découverte des sections coniques, les historiens ont donné des comptes rendus contradictoires basés sur des textes fragmentaires, des citations d'écrits anciens tirés de sources non mathématiques, et une quantité considérable de conjectures.

De nombreux traités importants de la première période des mathématiques islamiques n'ont pas survécu ou n'ont survécu que dans des traductions latines, de sorte que de nombreuses questions restent sans réponse quant à la relation entre les premières mathématiques islamiques et les mathématiques de la Grèce et de l'Inde. En outre, la quantité de matériel survivant des siècles suivants est si importante par rapport à ce qui a été étudié qu'il n'est pas encore possible de porter un jugement sûr sur ce que les mathématiques islamiques ultérieures ne contenaient pas, et il n'est donc pas encore possible d'évaluer avec certitude ce qui était original dans les mathématiques européennes du 11e au 15e siècle.

A l'époque moderne, l'invention de l'imprimerie a largement résolu le problème de l'obtention de textes sûrs et a permis aux historiens des mathématiques de concentrer leurs efforts éditoriaux sur la correspondance ou les œuvres inédites des mathématiciens. Cependant, la croissance exponentielle des mathématiques fait que, pour la période à partir du 19e siècle, les historiens ne peuvent traiter en détail que les grandes figures. A cela s'ajoute, au fur et à mesure que l'on se rapproche de la période actuelle, le problème de la perspective. Les mathématiques, comme toute autre activité humaine, ont leurs modes, et plus on se rapproche d'une période donnée, plus ces modes risquent de ressembler à la vague de l'avenir. C'est pourquoi le présent article ne tente pas d'évaluer les développements les plus récents en la matière.

Les mathématiques dans l'ancienne Mésopotamie

Jusque dans les années 1920, on supposait généralement que les mathématiques étaient nées chez les Grecs de l'Antiquité. Ce que l'on savait des traditions antérieures, comme la tradition égyptienne représentée par le papyrus Rhind (édité pour la première fois en 1877), constituait au mieux un maigre précédent. Cette impression a fait place à une vision très différente lorsque les historiens ont réussi à déchiffrer et à interpréter les matériaux techniques de l'ancienne Mésopotamie.

Grâce à la durabilité des tablettes d'argile des scribes mésopotamiens, les témoignages de cette culture sont nombreux.Les spécimens de mathématiques existants représentent toutes les grandes époques : les royaumes sumériens du troisième millénaire avant notre ère, les régimes akkadien et babylonien (deuxième millénaire) et les empires assyrien (début du premier millénaire), perse (du sixième au quatrième siècle avant notre ère) et grec (du troisième siècle avant notre ère au premier siècle de notre ère). Le niveau de compétence était déjà élevé sous l'ancienne dynastie babylonienne, à l'époque du roi législateur Hammourabi (vers le 18e siècle avant notre ère), mais il y a eu peu de progrès notables par la suite. L'application des mathématiques à l'astronomie s'est toutefois développée pendant les périodes perse et séleucide (grecque).

Le système numérique et les opérations arithmétiques

Contrairement aux Égyptiens, les mathématiciens de l'ancienne Babylonie sont allés bien au-delà des défis immédiats liés à leurs fonctions comptables officielles. Par exemple, ils ont introduit un système numéral polyvalent qui, comme le système moderne, exploite la notion de valeur de place, et ils ont développé des méthodes de calcul qui tirent parti de ce moyen d'expression des nombres ; ils ont résolu des problèmes linéaires et quadratiques par des méthodes très proches de celles utilisées aujourd'hui en algèbre ; leur succès dans l'étude de ce que l'on appelle aujourd'hui les triples nombres pythagoriciens a constitué une prouesse remarquable dans la théorie des nombres. Les scribes qui ont fait de telles découvertes ont dû penser que les mathématiques méritaient d'être étudiées en tant que telles, et pas seulement en tant qu'outil pratique.

L'ancien système numérique sumérien suivait un principe décimal additif (base 10) similaire à celui des Égyptiens. Mais l'ancien système babylonien l'a converti en un système de valeurs de place avec une base de 60 (sexagésimale). Les raisons du choix de 60 sont obscures, mais une bonne raison mathématique pourrait être l'existence d'un grand nombre de diviseurs (2, 3, 4 et 5, et quelques multiples) de la base, ce qui aurait grandement facilité l'opération de division.

Au 3e siècle avant notre ère, les Babyloniens semblent avoir mis au point un symbole de remplacement qui faisait office de zéro, mais sa signification et son utilisation précises restent incertaines. En outre, ils ne disposaient d'aucune marque pour séparer les nombres en parties intégrales et fractionnaires (comme c'est le cas avec la virgule moderne). Ainsi, le chiffre à trois places 3 7 30 pouvait représenter 31/8 (soit 3 + 7/60 + 30/602), 1871/2 (soit 3 × 60 + 7 + 30/60), 11 250 (soit 3 × 602 + 7 × 60 + 30), ou un multiple de ces nombres par n'importe quelle puissance de 60.
Les quatre opérations arithmétiques étaient effectuées de la même manière que dans le système décimal moderne, à ceci près que le report avait lieu chaque fois qu'une somme atteignait 60 au lieu de 10. La multiplication était facilitée par des tables ; une tablette typique énumère les multiples d'un nombre par 1, 2, 3,..., 19, 20, 30, 40 et 50. Pour multiplier deux nombres de plusieurs places, le scribe décomposait d'abord le problème en plusieurs multiplications, chacune par un nombre d'une place, puis il cherchait la valeur de chaque produit dans les tables appropriées. Il trouvait la réponse au problème en additionnant ces résultats intermédiaires. Ces tables l'aidaient également à effectuer des divisions, car les valeurs qui y figuraient étaient toutes des réciproques de nombres réguliers.
Les nombres réguliers sont ceux dont les facteurs premiers divisent la base ; les réciproques de ces nombres n'ont donc qu'un nombre fini de places (par contraste, les réciproques des nombres non réguliers produisent un chiffre se répétant à l'infini). En base 10, par exemple, seuls les nombres avec des facteurs de 2 et 5 (par exemple, 8 ou 50) sont réguliers, et les réciproques (1/8 = 0,125, 1/50 = 0,02) ont des expressions finies ; mais les réciproques d'autres nombres (tels que 3 et 7) se répètent à l'infini (la barre indique les chiffres qui se répètent continuellement). En base 60, seuls les nombres dont les facteurs sont 2, 3 et 5 sont réguliers ; par exemple, 6 et 54 sont réguliers, de sorte que leurs réciproques (10 et 1 6 40) sont finies. Les entrées de la table de multiplication de 1 6 40 sont donc simultanément des multiples de sa réciproque 1/54. Pour diviser un nombre par n'importe quel nombre régulier, on peut donc consulter la table des multiples de sa réciproque.

Problèmes géométriques et algébriques

Sur une tablette babylonienne conservée à Berlin, la diagonale d'un rectangle de 40 et 10 côtés est résolue par 40 + 102/(2 × 40). Une règle d'approximation très efficace est utilisée ici (la racine carrée de la somme de a2 + b2 peut être estimée comme a + b2/2a), la même règle que l'on retrouve fréquemment dans les écrits géométriques grecs ultérieurs. Ces deux exemples de racines illustrent l'approche arithmétique des Babyloniens en géométrie. Ils montrent également que les Babyloniens connaissaient la relation entre l'hypoténuse et les deux branches d'un triangle rectangle (aujourd'hui communément appelée théorème de Pythagore) plus de mille ans avant que les Grecs ne l'utilisent.
Un type de problème fréquemment rencontré dans les tablettes babyloniennes concerne la base et la hauteur d'un rectangle, dont le produit et la somme ont des valeurs précises.

À partir des informations données, le scribe a calculé la différence, puisque (b - h)2 = (b + h)2 - 4bh. De la même manière, si le produit et la différence sont donnés, la somme peut être trouvée. Et, une fois la somme et la différence connues, chaque côté peut être déterminé, car 2b = (b + h) + (b - h) et 2h = (b + h) - (b - h). Cette procédure équivaut à une solution de la quadratique générale à une inconnue. En certains endroits, cependant, les scribes babyloniens résolvaient les problèmes quadratiques en termes d'une seule inconnue, comme on le ferait aujourd'hui à l'aide de la formule quadratique.

Bien que ces procédures quadratiques babyloniennes aient souvent été décrites comme la première apparition de l'algèbre, il existe des distinctions importantes. Les scribes n'avaient pas de symbolisme algébrique ; bien qu'ils aient certainement compris que leurs procédures de résolution étaient générales, ils les présentaient toujours en termes de cas particuliers, plutôt que comme l'application de formules et d'identités générales. Ils n'avaient donc pas les moyens de présenter des dérivations et des preuves générales de leurs procédures de résolution. Leur utilisation de procédures séquentielles plutôt que de formules est cependant moins susceptible de nuire à l'évaluation de leurs efforts, maintenant que des méthodes algorithmiques très semblables aux leurs sont devenues courantes grâce au développement des ordinateurs.
Comme mentionné ci-dessus, les scribes babyloniens savaient que la base (b), la hauteur (h) et la diagonale (d) d'un rectangle satisfont à la relation $b^2 + h^2 = d^2$. Si l'on choisit des valeurs au hasard pour deux des termes, le troisième sera généralement irrationnel, mais il est possible de trouver des cas où les trois termes sont des entiers : par exemple, 3, 4, 5 et 5, 12, 13. (De telles solutions sont parfois appelées triples de Pythagore.) Une

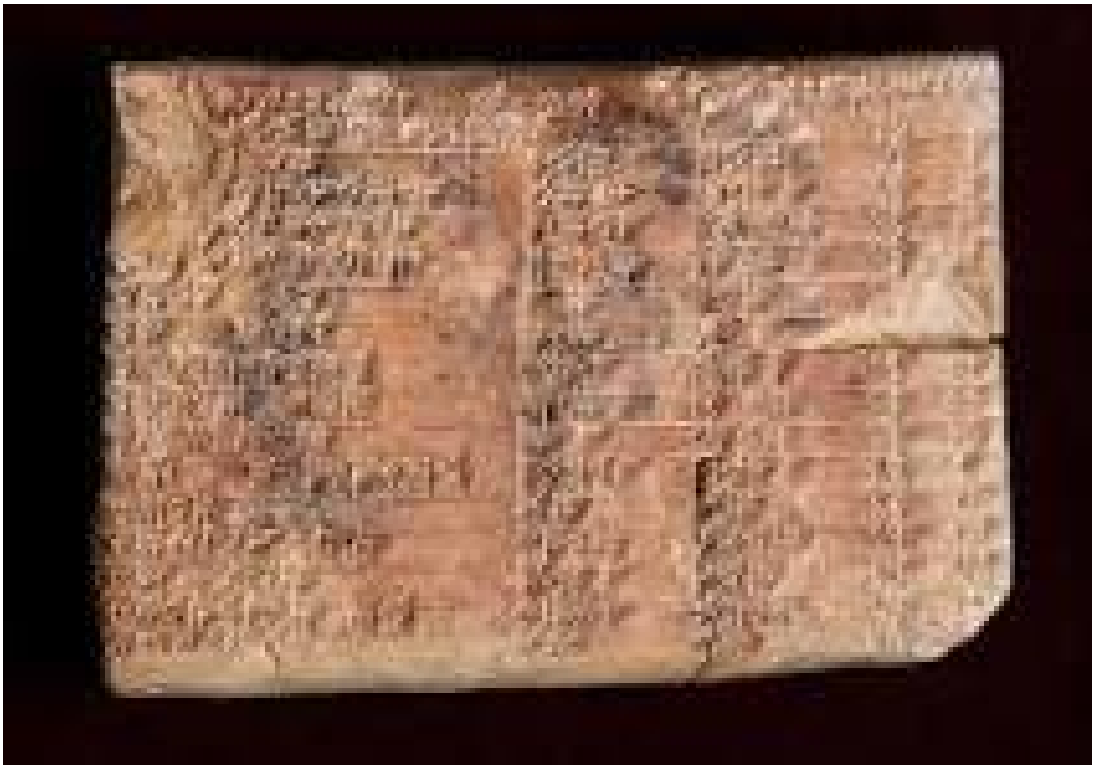

FIGURE 2.1 – Tablette Babylionenne

tablette de la Columbia University Collection présente une liste de 15 triples de ce type (les équivalents décimaux sont indiqués entre parenthèses à droite ; les espaces dans les expressions pour h, b et d séparent les valeurs de place dans les nombres sexagésimaux) :

h	*b*	*d*			
2	1 59	2 49	(120	119	169)
57 36	56 7	1 20 45	(3,456	3,367	4,825)
1 20	1 16 41	1 50 49	(4,800	4,601	6,649)
3 45	3 31 49	5 9 1	(13,500	12,709	18,541)
1 12	1 5	1 37	(72	65	97)
...	...	...	...	...	...
1 30	56	1 46	(90	56	106)

FIGURE 2.2 – Pythagorean-triples-composition

(Les entrées dans la colonne pour h doivent être calculées à partir des valeurs pour b et d, car elles n'apparaissent pas sur la tablette ; mais elles ont dû exister autrefois sur une partie aujourd'hui manquante). L'ordre des lignes apparaît clairement dans une autre colonne, qui énumère les valeurs de d^2/h^2 (les parenthèses indiquent les chiffres perdus ou illisibles), qui forment une séquence continuellement décroissante : [1 59 0] 15, [1 56 56] 58 14 50 6 15,..., [1] 23 13 46 40. En conséquence, l'angle formé entre la diagonale et la base dans cette séquence augmente continuellement d'un peu plus de 45° à un peu moins de 60°. D'autres propriétés de la séquence suggèrent que le scribe connaissait la procédure générale pour trouver tous ces nombres triples, à savoir que pour tout entier p et q, 2d/h = p/q + q/p et 2b/h = p/q - q/p. (Dans le tableau, les valeurs implicites de p/q et q/p sont les mêmes). (Dans le tableau, les valeurs implicites p et q s'avèrent être des nombres réguliers appartenant à l'ensemble standard des réciproques, comme nous l'avons mentionné plus haut à propos des tables de multiplication). Les érudits débattent encore des nuances de la construction et de l'utilisation prévue de cette table, mais personne ne remet en question le haut niveau d'expertise qu'elle implique.

Astronomie mathématique

La méthode sexagésimale développée par les Babyloniens a un potentiel de calcul bien plus important que ce qui était réellement nécessaire pour les anciens textes problématiques. Avec le développement de l'astronomie mathématique à l'époque séleucide, elle est cependant devenue indispensable. Les astronomes cherchaient à prédire les occurrences futures de phénomènes importants, tels que les éclipses de lune et les points critiques des cycles planétaires (conjonctions, oppositions, points stationnaires, première et dernière visibilité). Ils ont mis au point une technique pour calculer ces positions (exprimées en termes de degrés de latitude et de longitude, mesurés par rapport à la trajectoire du mouvement annuel apparent du Soleil) en ajoutant successivement les termes appropriés selon une progression arithmétique. Les résultats étaient ensuite organisés en un tableau énumérant les positions aussi loin que le scribe le souhaitait. (Bien que la méthode soit purement arithmétique, on peut l'interpréter graphiquement : les valeurs tabulées forment une approximation linéaire « en zigzag » de ce qui est en réalité une variation sinusoïdale). Si des observations s'étalant sur des siècles sont nécessaires pour trouver les paramètres requis (par exemple, les périodes, l'écart angulaire entre les valeurs maximales et minimales, etc.), seul l'appareil de calcul à leur disposition a permis aux astronomes de réaliser leurs prévisions.

Dans un laps de temps relativement court (peut-être un siècle ou moins), les éléments de ce système sont parvenus aux mains des Grecs. Bien qu'Hipparque (IIe siècle avant notre ère) ait préféré l'approche géométrique de ses prédécesseurs grecs, il a repris les paramètres des Mésopotamiens et adopté leur style de calcul sexagésimal. Par l'intermédiaire des Grecs, cette méthode a été transmise aux scientifiques arabes au Moyen Âge, puis à l'Europe, où elle est restée au premier plan de l'astronomie mathématique pendant la Renaissance et le début de la période moderne. Aujourd'hui encore, elle persiste dans l'utilisation des minutes et des secondes pour mesurer le temps et les angles.

Certains aspects des mathématiques de l'ancienne Babylone sont peut-être parvenus aux Grecs encore plus tôt, peut-être au Ve siècle avant notre ère, période de formation de la géométrie grecque. Les chercheurs ont relevé un certain nombre de parallèles. Par exemple, la technique grecque de « l'application de l'aire » (voir ci-dessous les mathématiques grecques) correspondait aux méthodes quadratiques babyloniennes (bien que sous une forme géométrique et non arithmétique). En outre, la règle babylonienne d'estimation des racines carrées était largement utilisée dans les calculs géométriques grecs, et il est possible que certaines nuances de la terminologie technique aient été partagées. Bien que les détails concernant le moment et la manière dont cette transmission s'est effectuée soient obscurs en raison de l'absence de documentation explicite, il semble que les mathématiques occidentales, bien qu'issues en grande partie des Grecs, soient considérablement redevables aux anciens Mésopotamiens.