المحور السادس: برمجة الأعداد الصحيحة Integer Programming

تُعد البرمجة العددية فرعًا من البرمجة الخطية، غير أنها تفقد صفة الخطية التقليدية نتيجة تخليها عن شرط قابلية التجزئة، حيث يُشترط أن تتخذ بعض أو جميع المتغيرات قيمًا صحيحة غير كسرية.
وقد تأخذ هذه المسائل شكلين:

- البرمجة العددية المختلطة :حيث يُشترط أن تكون بعض المتغيرات صحيحة بينما يُسمح للبقية بأن تكون كسرية.
- البرمجة العددية الصرفة :وهي الحالة التي يُفرض فيها أن تكون جميع المتغيرات أعدادًا صحيحة فقط.

ولحل هذه الأنواع من المسائل، خاصة تلك التي تتميز بطبيعة خاصة، ظهرت عدة مناهج وطرائق متعددة قدمها الباحثون، تهدف إلى إيجاد حلول فعالة لمشاكل البرمجة الخطية ذات الأعداد الصحيحة.

(مسعود الشيخ، 2009، صفحة 235).

المثال 1:

في بيئة الإنتاج ذات الخطوط المحددة، يُلاحظ أن هناك nnnعملية إنتاجية يمكن تنفيذها جميعًا على آلة واحدة، بهدف تقليل زمن التشغيل إلى أدنى حد ممكن. ينتقل المنتج بعد الانتهاء من كل عملية إلى العملية التالية ضمن تسلسل الإنتاج حتى تكتمل العملية الأخيرة، محققًا بذلك الزمن الإجمالي المطلوب للإنتاج.

ويُشترط على هذه العملية الإنتاجية مجموعة من القيود، يمكن تلخيصها فيما يلي:

1. الترتيب أو التسلسل الزمني للعمليات.
2. عدد المرات التي تتداخل فيها العمليات أو يتم فيها التبديل بينها.
3. تحقيق الزمن الكلي للإنتاج المطلوب بأعلى كفاءة ممكنة.

كما يُضاف إلى هذه القيود أن من الممكن تنفيذ عمليتين إنتاجيتين على نفس الآلة بالتناوب، إذا سمح تنظيم الجدولة بذلك.

فمثلاً لو فرضـــــنا أن النوع الأول x_j الزمن المحدد لبداية العملية الإنتاجية الأولى J وأن a_j هو الزمن اللازم للعملية الإنتاجية J.

فإذا كانت العملية I تسبق العملية J فإن نتيجة التسلسل تعني الآتي: $x_i + a_i \leq x_j$

أما إذا اعتبرنا الشرط الثاني فإن: $x_j - x_i \geq a_i$ أو $x_i + x_j \geq a_i$

وهذا يعتمد على أن i أو x أو J ثابتاً في الحل الأمثل للمسألة.

أما القيد الثالث:

$$y_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{إذا كان العملة } j \text{ تسبق } i \\ 1 & \text{إذا كان العملة } i \text{ تسبق } j \end{cases}$$

للتعرف بأن M قيمة عالية جدًا:

$$My_{ij} + (x_i - x_j) \geq a_j$$
$$M(1 - y_{ij}) + (x_j - x_i) \geq a_i$$

أما عن زمن إتمام العملية الإنتاجية فيمكن تعريفه بالمعادلة التالية: $x_j + a_i \leq d_j$

حيث d_j الزمن اللازم لتكميل المنتج.

فإذا عرفنا t بأنها الزمن الإجمالي لإنهاء جميع العمليات الإنتاجية فإن المسألة تصاغ على النحو الآتي:

$$Minimize \quad z = t$$
$$S.T.$$
$$x_j + a_j \leq 1 \quad , \quad j = 1,2, \dots \dots, n$$

2- طرق حل البرمجة الخطية للأعداد الصحيحة:

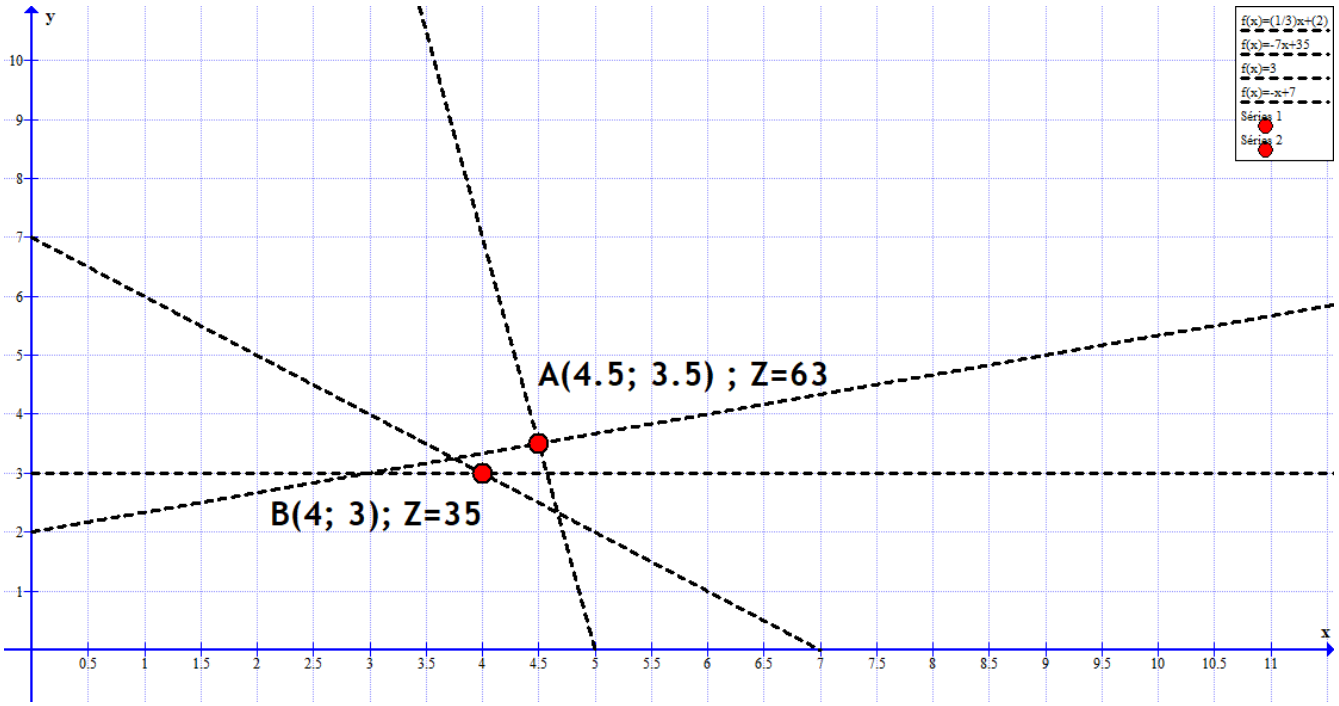
أ-طريقة قطاع مستوى:

تهتم هذه الطريقة بحل مسائل البرمجة الخطية بواسطة حل المسائل بواسطة الرسم.

مثال: $Max \quad Z = 7x_1 + 9x_2$

$$S.T.$$
$$x_1 - 3x_2 \leq 6$$
$$7x_1 + x_2 \leq 35$$

وأعداد صحيحة: $x_1 , x_2 \geq 0$



وإذا بحثنا عن الحل في الزوايا للمساحة المحصورة مع إهمال شرط الحصول على الأعداد الصحيحة فإنه سوف يعطي: $z = 63 \quad , \quad x_2 = \frac{7}{2} \quad , \quad x_1 = \frac{9}{2}$

من الملاحظ أن هذا الحل ينتج عنه **قيم غير صحيحة** للمتغيرات.

وتعتمد **فكرة طريقة قطع المستويات (Cutting Planes)** على تعديل **الوظيفة المحدبة أو المقعرة للحل** بحيث يتم استبعاد الحلول الكسرية، مما يؤدي إلى تقليص منطقةfeasible solution ، أي المنطقة التي تحتوي على الحلول الممكنة، لضمان الحصول على **حلول صحيحة (أعداد صحيحة فقط).**

وبالتالي، يتم **إلغاء القيم العشرية** واستبعادها من نطاق الحل، ليُعاد توجيه البحث نحو حلول تحقق نفس الشروط ولكن بقيم صحيحة، كما يتضح من الرسم المرافق. وعندها يُصبح الحل المعتمد هو الحل الذي يُحقق كافة القيود باستخدام **أعداد صحيحة فقط.**

: $z = 55 \quad , \quad x_2 = 3 \quad , \quad x_1 = 4$

أما عن التعبير عن هذه الطريقة بواسطة السمبلكس فسوف نوضحها في المثال التالي:

مثال: بالإشارة إلى المثال السابق الذي تم حلّه بواسطة الرسم نلاحظ أن الجدول النهائي (الحل الأمثل) سوف يكون على الصورة التالية:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
z	0	0	$\frac{28}{11}$	$\frac{15}{11}$	63

x_2	0	0	$\frac{7}{22}$	$\frac{1}{22}$	$\frac{7}{2}$
x_1	1	1	$\frac{-1}{22}$	$\frac{3}{22}$	$\frac{9}{2}$

بما أن الحل ذو أعداد غير صحيحة:

$$Ox_1 + x_2 + \frac{7}{22}x_3 + \frac{7}{22}x_4 = 3\frac{1}{2}$$
$$\left(0 + \frac{7}{22}\right)x_3 + \left(0 + \frac{1}{22}\right)x_4 = \left(3 + \frac{1}{2}\right)$$
$$S_1 = \frac{7}{22}x_3 - \frac{1}{22}x_4 = -\frac{1}{2}$$

بإضافة هذه المعادلة إلى الجدول السابق وفق قواعد قطع المستويات (مسعود الشيخ، 2009، صفحة 243).

	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	الطرف الأيمن
z	0	0	$\frac{28}{11}$	$\frac{15}{11}$	0	63
x_2	0	0	$\frac{7}{22}$	$\frac{1}{22}$	0	$\frac{7}{2}$
x_1	1	1	$\frac{-1}{22}$	$\frac{3}{22}$	1	$\frac{9}{2}$
S_1	1	0	$\frac{-7}{22}$	$\frac{-1}{22}$	1	

السمبلكس الثاني يعكي:

	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	الحل
z	0	0	0	1	0	63
x_2	0	0	0	0	0	0
x_1	1	1	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{-1}{7}$	$4\frac{4}{7}$
x_3	1	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{-22}{7}$	$1\frac{4}{7}$

ما دام الحل ما زال غير ذي أعداد صحيحة:

∴ يمكن كتابة المعادلة x_1 على النحو التالي:

$$x_1 + \left(1 + \frac{1}{7}\right)x_4 + \left(-1 + \frac{6}{7}\right)S_1 = \left(4 + \frac{4}{7}\right)$$

$$S_2 - \frac{1}{7}x_4 - \frac{6}{7}S_1 = -\frac{4}{7}$$

بإضافة هذا القيد إلى آخر جدول نحصل على الآتي:

	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	
z	0	0	0	1	8	0	59
x_2	0	1	0	0	1	0	3
x_1	1	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{-1}{7}$	0	$4\frac{4}{7}$
x_3	1	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{-22}{7}$	0	$1\frac{4}{7}$
S_2	1	0	0	$\frac{-1}{7}$	$\frac{-6}{7}$	1	$\frac{-4}{7}$

إن استخدام طريقة السمبلكس الثنائي يؤدي إلى الآتي:

	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	
z	0	0	0	1	2	7	35
x_2	0	1	0	0	1	0	3
x_1	1	0	0	0	-1	1	4
x_3	0	0	1	0	-4	1	1
x_4	0	0	0	1	6	-7	4

وهذا الجدول يعطي الحل الأمثل للأعداد الصحيحة حيث:

$x_1 = 4$, $x_2 = 3$, $z = 55$

2 = 55 X2 = 3