المحور الرابع: طريقة السمبلكس Simplex Method:

نظرًا لصعوبة استخدام الطريقة البيانية في حل مسائل البرمجة الخطية التي تحتوي على أكثر من متغيرين، ومع أن غالبية المســـائل العملية تتضـــمن ثلاثة متغيرات أو أكثر، فإننا نلجأ إلى **الطريقة المبســـطة (طريقة السـمبلكس)** كأداة فعّالة لمعالجة هذا النوع من المشـكلات (الهزاع الصـمادي ,2009صـفحة44) ، وهي طريقة للعالم الأمريكي جورج وانترج، الذي استخدمها عام 1945 .

حيث تتلخص طريقة الحل باستخدام Simplex Method بالخطوات التالية :

1. بناء النموذج الرياضي للمسألة.
2. إعادة كتابة النموذج الرياضي حسب الشكل القياسي Standard forum.

وهو على الصورة العامة التالية:

$$Min\ (Max)Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n$$

$$S.T:$$

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots. + a_{1n}X_n = b_1$$

$$\begin{bmatrix} a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots. a_{2n}X_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n = b_m \end{bmatrix}$$

$$X_1, X_2, X_3, \ldots \ldots \ldots X_n \geq 0$$

$$b_1, b_2, b_3, \ldots \ldots \ldots b_m \geq 0$$

3. إيجاد الحل الأولي الممكن .Initial Feasible Solution.
4. ترتيب الحل الأولي في الجدول.
5. اتباع خطوات معينة لإيجاد الحل الأمثل والتي سنوضحها في المثال التالي:

معلومة: يمكن إعادة كتابة الصورة العامة بطريقة المصفوفة كالتالي:

$$Max(Min)Z = C^TX$$

$$AX = b$$

$$X_i \geq 0 \qquad i = 1,2, \ldots \ldots, n$$

$$b_j \geq 0 \qquad j = 1,2, \ldots \ldots, m$$

مثال 1: اكتب النموذج الرياضي التالي حسب الشكل القياسي:

$$Max\ Z = 5X_1 + 3X_2$$

$$S.T:$$

$$2X_1 + X_2 \leq 10$$

$$4X_1 + 3X_2 \leq 24$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل:

$$MAX\quad Z - 5X_1 - 3X_2 + 0S_1 + 0S_2 = 0$$

$$S.T:$$

$$2X_1 + X_2 + S_1 = 10$$

$$4X_1 + 3X_2 + S_2 = 24$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$$

نُلاحظ في هذا السياق أنه تم تحويل القيود التي تحتوي على علاقة "أقل من أو يساوي" ($\geq$) إلى معادلات مساواة، وذلك من خلال إضافة متغير إضافي يُعرف باسم **المتغير الفائض** أو **متغير الفراغ (Slack Variable)** إلى كل قيد من هذا النوع.

يُمثل هذا المتغير الفرق بين الموارد المتاحة والموارد المستعملة فعليًا، كأن يُعبر عن الفرق بين الوقت الكلي المتوفر للإنتاج والوقت المستخدم فعليًا، أو الفرق بين الكمية الإجمالية المتاحة والكمية المستهلكة في العملية الإنتاجية.

(نور الشمرتيوآخرون ,2007صفحة45) .

مثال 2: اكتب النموذج الرياضي التالي حسب الشكل القياسي:

$$MIN\ \ Z = 2X_1 + X_2$$

$$S.T:$$

$$3X_1 + X_2 \geq 3$$

$$4X_1 + 3X_2 \geq 6$$

$$X_1 + X_2 \geq 2$$

$$X_1, X_2, \geq 0$$

الحل:

$$Min\ Z - 2X_1 - X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 = 0$$

$S.T:$

$$3X_1 + X_2 - S_1 \geq 3$$

$$4X_1 + 3X_2 - S_2 \geq 6$$

$$X_1 + X_2 - S_3 \geq 2$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

استخدام طريقة السمبلكس Simplex Method في حل مسائل تعظيم الأرباح Maximization:

مثال 1: مستخدمًا طريقة السمبلكس أوجد الحل الأمثل للنموذج الرياضي التالي:

$$MAX\ \ Z = 2X_1 + 3X_2$$

$S.T:$

$$X_1 + 2X_2 \leq 20$$

$$X_1 + 3X_2 \leq 12$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل: في هذا المثال سنوضح كل خطوة بالتفصيل:

1. تحويل دالة الهدف Z إلى دالة صفرية أي مساوية للصفر كالتالي:

$$Z - 2X_1 - 3X_2 = 0$$

2. تحويل جميع القيود من متباينات إلى معادلات وذلك بإضافة متغير حر جديد يسمى بالمتغير الإضافي Slack Variable وسوف نرمز له بالرمز S_i وذلك بعدد المعادلات. حيث تمثل i عدد المتغيرات.

$$X_1 + 2X_2 + S_1 = 20$$

$$X_1 + X_2 + S_2 = 12$$

3. إضافة شرط عدم السلبية إلى جميع المتغيرات في المسألة.

$$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$$

يمكننا ترتيب الخطوات السابقة مع بعضها البعض على النحو التالي:

$$MAX\ \ Z - 2X - 3X = 0$$

$S.T:$

$$X_1 + 2X_2 + S_1 = 20$$

$$X_1 + X_2 + S_2 = 12$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$$

4. نكون جدولاً يتضـــمن معاملات المتغيرات في دالة الهدف والقيود بالصـــيغ الجديدة ويســـمى هذا الجدول بجدول الحل الابتدائي كما يلي:

Basic Variable	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	Solution
Z	1	−2	−3	0	0	0
S_1	0	1	2	1	0	20
S_2	0	1	1	0	1	12

من الجدول يمكن إيجاد الحل الابتدائي وذلك كما يلي:

$$X_1 = X_2 = 0$$

$$S_1 = 20\,, S_2 = 12$$

$$Z = 0$$

لحساب قيم المتغيرات في هذا الجدول أو في أي جدول مماثل، يتم الرجوع إلى عمود **المتغيرات الأساسية (Basic Variable)**ومطابقة كل متغير مع القيمة المقابلة له في عمود **الحل**.**(Solution)**

تُعرف المتغيرات مثل X1X_1X1 وX2X_2X2 بـ **المتغيرات الداخلة(Entering Variables)** ، وهي التي يكون لها تأثير مباشر على قيمة دالة الهدف.

في المقابل، تُعتبر المتغيرات مثل S1S_1S1 وS2S_2S2 من **المتغيرات الخارجة(Leaving Variables)** ، وهي التي لا تؤثر على دالة الهدف وتُستخدم غالبًا لضبط القيود وتحقيق المساواة.

معلومة:

1. طريقة الســـــمبلكس تفترض عند بدء الحل أن يكون الفرق بين عدد المتغيرات ويرمز له بالرمز n وعدد قيود المسألة ويرمز له بالرمز m مساوياً للصفر (الهزاع الصمادي ,2009صفحة47) .

ففي المثال أعلاه عدد المتغيرات يساوي أربعة X_1, X_2, S_1, S_2 أي أن $n = 4$ وعدد القيود يساوي اثنين أي أن $m = 2$ وعليه فإن $n - m = 2$، وبما أن الناتج لا يســـاوي صـــفرًا يجب أن نضـــيف متغيرين بناءً على الفرق بين m و n وتكون قيمة هذين المتغيرين صـفر كي يتم البدء في حل أســاســي ممكن Basic.Feasible Solution.

2. وفي طريقة الســمبلكس تكون قيم المتغيرات الأصــلية مســاوية للصــفر في بداية الحل ففي المثال أعلاه كانت قيمة $X_1 = 0,\ X_2 = 0$.

3. يتم تحويل المتغيرات من متغيرات غير أساسية (مساوية للصفر) إلى متغيرات أساسية (لها قيمة معينة)، حسب قواعد وشروط كما في النقطة رقم 5.

5. اختيار المتغيرات الداخلة (**Entering Variable**) والخارجة(**Leaving Variable**)

معلومة:

- **المتغير الداخل** هو متغير غير أساسي يُراد إدخاله إلى مجموعة المتغيرات الأساسية، مثل : X1X_1X1، X2X_2X2.
- **المتغير الخارج** هو متغير أساسي يُراد استبعاده من مجموعة المتغيرات الأساسية، مثلS1S_1S1 :، S2S_2S2.

كيفية تحديد المتغير الداخل:

يتم اختيار المتغير الداخل من خلال تحديد المتغير الذي يمتلك **أكبر معامل سلبي** في صف دالة الهدف داخل جدول السمبلكس.
في المثال المعطى، نلاحظ أن المتغير X2X_2X2 هو الذي يحمل أكبر قيمة سالبة وهي 3−3−3− في دالة الهدف ZZZ، وعليه فإن X2X_2X2 يُعتبر المتغير الداخل.

كيفية تحديد المتغير الخارج:

يتم تحديد المتغير الخارج عن طريق **حساب النسبة بين القيم الموجودة في عمود الحل (Solution)** والمعاملات المقابلة لها في **عمود المتغير الداخل**، مع تجاهل القيم السالبة والصفرية في المقام.
المتغير الذي يقع في الصف الذي يُعطي **أقل نسبة موجبة** هو الذي يُختار كمتغير خارج.

يمكن توضيح هذه الخطوة من خلال الجدول التالي:

$Basic\ Var$ متغيرات أساسية	عمود المتغير الداخل X_2	Solution	ناتج القسمة

S_1	2	20	$20/2=10$
S_2	1	12	$12/1=12$

المتغير الداخل هو X_2، والمتغير الخارج هو S_1 (أقل نسبة ناتجة عن تقسيم الثوابت على المعاملات).

6. لبناء الجدول رقم 2:

– نقوم بتقسيم جميع القيم إزاء المتغير الخارج S_1 أو معادلة S_1 على العنصر الممهد Pivot Element ويسمى ناتج القسمة بالمعادلة الممهدة Pivot Equation ويتم وضعها في الجدول رقم2

Basic	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	Solution
Z	1	$-1/2$	0	$3/2$	0	30
X_2	0	$1/2$	$2/2=1$	$1/2$	0	$20/2=10$
S_1	0	$1/2$	0	$-1/2$	1	2

جدول رقم 2

–نقوم بتعبئة بقية القيم في الجدول بعد تحديد معادلة العنصر الداخل الجديد X_2 على النحو التالي:

القانون (المعادلة):

سطر القيم الجديد=سطر القيم القديم – سطر القيم المقابلة تحت عمود المتغير الداخل × المعادلة الممهدة.

وبالتالي نملأ الجدول رقم 2 كالتالي:

– لإيجاد معادلة Z الجديدة.

معادلة Z الجديدة = سطر القيم القديم لـ Z – المعادلة الممهدة × 3

$-3\times$	1	$1/2$	1	$1/2$	0	10	$-$	-2	-3	0	0	$=$

$-1/2$	0	$3/2$	0	30	= لتصبح معادلة Z الجديدة

لإيجاد معادلة S_2 الجديدة = معادلة S_2 القديمة – المعادلة الممهدة × 1

$1\times$	$1/2$	1	$1/2$	0	10	$-$	1	1	0	1	12
$1/2$	0	$-1/2$	1	2	$= S_2$ ∴ المعادلة الجديدة لـ						

معلومة هامة: نعرف بأننا وصلنا إلى الحل الأمثل في حالة مسائل:

التعظيم:(Maximization)

في مسائل تعظيم دالة الهدف، يتم التأكد من الوصول إلى **الحل الأمثل** عندما تكون جميع معاملات المتغيرات في صف دالة الهدف داخل جدول السمبلكس **موجبة أو تساوي الصفر.$(0 \geq)$**
أما إذا وُجد **أي معامل سالب،** فهذا يدل على أن الحل لا يزال غير نهائي، ويجب تكرار الخطوات السابقة لاستكمال الحل.

التقليل:(Minimization)

أما في مسائل تقليل دالة الهدف، فإن **الحل الأمثل** يتحقق عندما تكون **جميع المعاملات في صف دالة الهدف أقل من أو تساوي الصفر.$(0 \leq)$**
وفي حال وجود **أي معامل موجب،** فهذا يعني أن الحل لم يكتمل، ويجب إعادة تنفيذ الخطوات السابقة للوصول إلى النتيجة المثلى.

ملاحظة تطبيقية:

في المثال السابق، لم نصل بعد إلى الحل الأمثل، وذلك بسبب وجود معامل سالب في صف دالة الهدف، وهو معامل المتغير X1X_1X1 والذي يساوي .−21− {2}{1}\frac−12
لذلك، يجب **إعادة تطبيق الخطوتين 5 و6** كما هو موضح في الإجراء السابق، إلى أن تتحقق شروط الوصول إلى الحل الأمثل.

العنصر الداخل هو X_1 وذلك لأنه يمتلك أعلى معامل سالب ويساوي $1/2-$ ولتحديد المتغير الخارج نقوم بقسمة الثوابت تحت عمود الحل على المعاملات تحت عمود المتغير الداخل X_1 كالتالي:

ناتج القسمة	Solution	عمود المتغير الداخل X_1	$Basic\ Varible$ متغيرات أساسية
$10(1/2) = 20$	10	$1/2$	X_2
$2(1/2) = 4$	2	$1/2$	S_2

لذا يكون العنصر الخارج S_2 لأن ناتج القسمة أقل ويحل محله X_1 العنصر الممهد هو $1/2$ ومن ثم نقسم معادلة S_2 على العنصر الممهد $1/2$.

Basic	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	Solution
Z	1	0	0	1	1	32
X_2	0	0	1	1	-1	8
X_1	0	1	0	-1	2	4

جدول رقم (3)

تم ملء القيم في الجدول السابق كالتالي:

1. معادلة Z الجديدة = سطر القيم القديم لـZ − المعادلة الممهدة × $(-1/2)$

$-1/2\times$	1	0	-1	2	4	-	$-1/2$	0	$3/2$	0	30	=
								0	0	1	1	30 = معادلة Zالجديدة

2. معادلة X_2الجديدة :سطر القيم القديم لـX_2 − المعادلة الممهدة × $(1/2)$

$(1/2)\times$	1	0	-1	2	4	-	$1/2$	1	$1/2$	0	10	=
	0	1	1	-1	8	= X_2 السطر الجديد لـ ∴						

يتضـــح من الجدول رقم 3 أن جميع معاملات دالة الهدف Z موجبة. لذا فإننا قد توصـــلنا إلى الحل الأمثل للمسألة وعليه تكون قيم المتغيرات كالتالي: $S_1 = 0$, $X_1 = 4$

$S_2 = 0$, $X_2 = 8$

وقيمة الأرباح: $Z = 32$