المحور الثالث: الحل البياني

يُقصد بحل البرنامج الخطي تحديد قيم المتغيرات التي تُحقق أفضل قيمة ممكنة لدالة الهدف، سواء من خلال تعظيمها أو تقليلها، وذلك مع الالتزام الكامل بالقيود المفروضة على المسألة. (راتول، 2008، صفحة 25).

ملاحظة :إذا تعذر تحديد النقطة الأخيرة التي يصل إليها مستقيم دالة الهدف بشكل دقيق، يُنصح بحساب قيم المتغيرات عند النقاط المحتملة داخل منطقة الحل، ثم تعويضـــها في دالة الهدف، واختيار النقطة التي تعطي أعلى قيمة للدالة الاقتصادية

مثال 2−1 : أوجد حل للبرنامج التالي باستخدام الطريقة البيانية:

$$Max: Z = 100x_1 + 60x_2$$

$$S/C \begin{cases} 8x_1 + 2x_2 \leq 40 \\ 6x_1 + 9x_2 \leq 108 \\ 8x_1 + 6x_2 \leq 96 \\ x_1 \geq 0\,, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

لإيجاد حل لهذا البرنامج نتبع الخطوات التالية:

نستخرج المستقيمات المولدة وذلك بتحويــل المتراجحات إلى معادلات كما يلي:

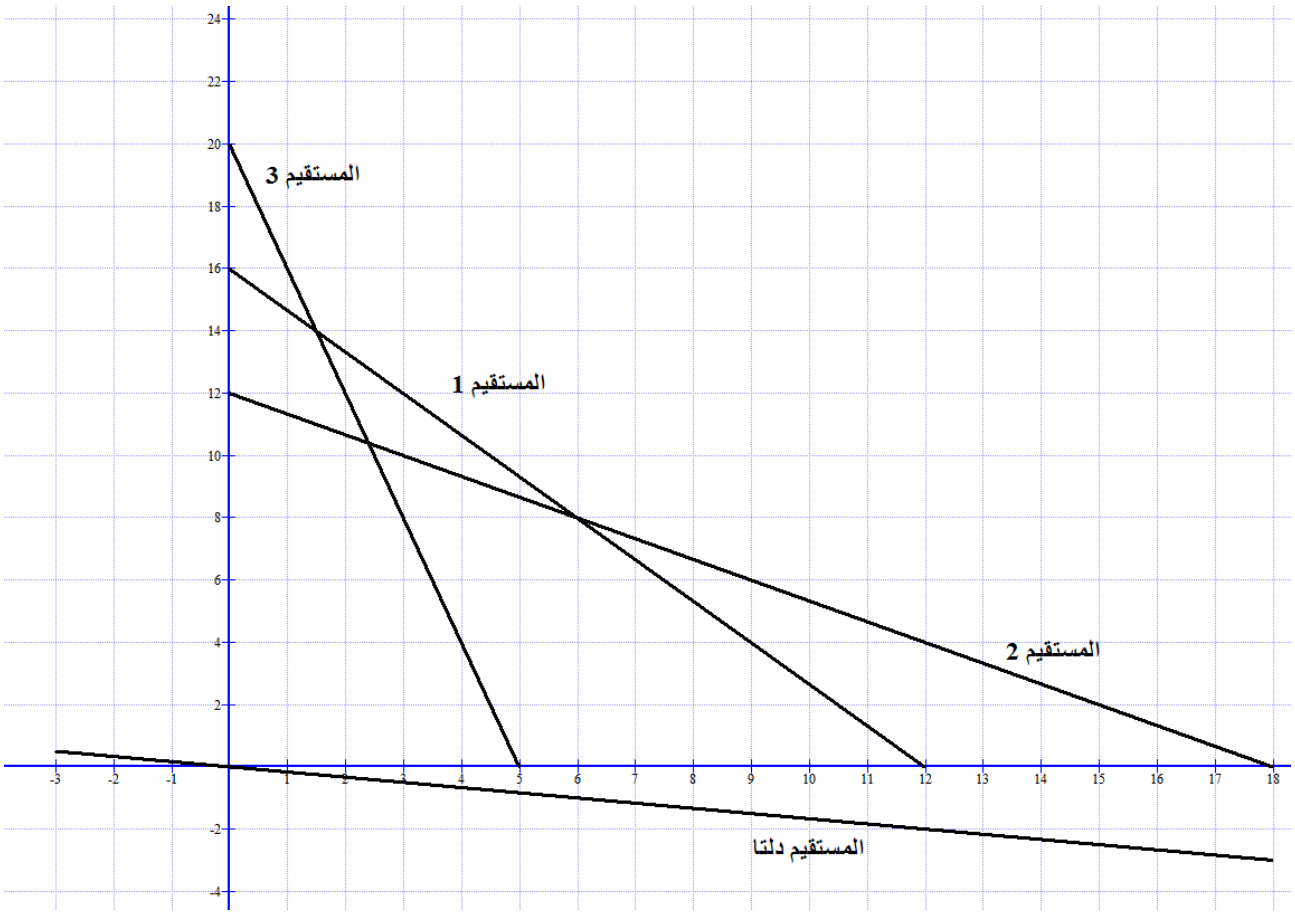
$8x_1 + 6x_2 = 96$	$6x_1 + 9x_2 = 108$	$8x_1 + 2x_2 = 40$

المستقيم 1. المستقيم 2. المستقيم 3.

$8x_1 + 6x_2 = 96$	
x_1	x_2
0	20
5	0

$6x_1 + 9x_2 = 108$	
x_1	x_2
0	12
18	0

$8x_1 + 2x_2 = 40$	
x_1	x_2
0	16
12	0



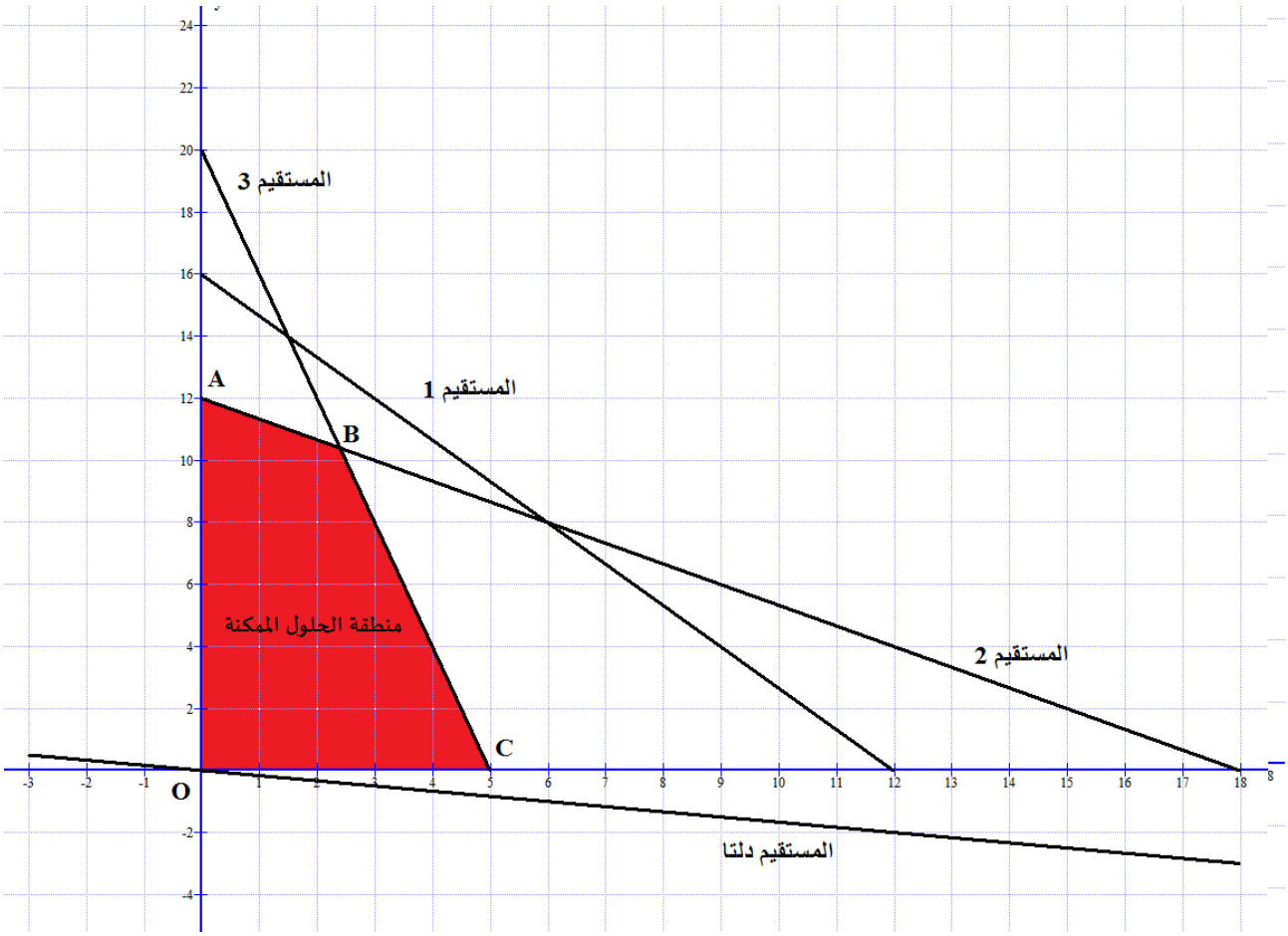
الشكل 1

ج- على نفس المعلم نرسم المستقيم Δ. وهو المستقيم المحصل عليه عند وضع الدالة الاقتصادية في أدنى قيمة لها وهي: $Z = 0$ أي : $Z = 100x_1 + 60x_2 = 0$

المستقيم Δ يمر من النقطتين:

$100x_1 + 60x_2 = 0$	
x_1	x_2
3	-5
-3	5

ويكفي تحديد نقطة واحدة فقط لكونه يمر إلزامًا بنقطة المبدأ.



الشكل 2

من خلال الشـكل نلاحظ أن أية نقطة توجد إلى يمين المسـتقيم (1) لا تحقق القيد، فلو أخذنا النقطة J على سبيل المثال حيث: $x_1 = 4$ و $x_2 = 16$ لوجدنا أن:

$$8x_1 + 2x_2 = 8 \times 4 + 2 \times 16 = 64 > 40$$

فالقيد إذًا غير محقق على اليمين، لكن أية نقطة على يسار المستقيم (1) فهي تحقق القيد، فلو أخذنا النقطة على سبيل المثال حيث: $x_1 = 2$ و $x_2 = 8$ لوجدنا أن:

$$8x_1 + 2x_2 = 8 \times 2 + 2 \times 8 = 32 < 40$$

وبذلك يكون القيد محققًا، ويُلاحظ وجود فائض في الطاقة يُقدّر بـ 8 وحدات. ومن جهة أخرى، فإن جميع النقاط الواقعة على المستقيم (1) تحقق القيد بدقة، أي تحقق حالة المساواة، مما يعني أن هذه النقاط تستهلك كامل الطاقة المتاحة دون زيادة أو نقصان.

أما بالنسبة لقيد عدم السالبية، فهو يستبعد تلقائيًا كل النقاط الواقعة أسفل المحور الأفقي أو إلى يسار المحور العمودي، مما يُبقي على منطقة واحدة فقط تستوفي جميع القيود في الوقت ذاته، وهي المنطقة المحددة بالحدود OAEG(المنطقة غير المظللة). وتُعرف هذه المنطقة باسم "منطقة الحلول الممكنة" أو "منطقة الحلول المقبولة."

عند رفع مستقيم دالة الهدف (Δ) تدريجيًا نحو الأعلى، نجد أن آخر نقطة يلامسها داخل منطقة الحل المقبول هي النقطة EEE، مما يجعلها تمثل **الحل الأمثل للمسألة** .وتمثل هذه النقطة تقاطع المستقيمين (1) و.(2) يمكن تحديد قيمتي المتغيرين بطريقتين:

- **هندسيًا**، وذلك من خلال إسقاط عمودي من النقطة EEEعلى المحور الأفقي للحصول على قيمة x1x_1x1، ورسم مستقيم أفقي من النقطة نفسها حتى يتقاطع مع المحور العمودي للحصول على قيمة x2x_2x2.
- **جبريًا**، من خلال حل معادلات المستقيمين (1) و(2) معًا لإيجاد القيم الدقيقة للمتغيرين.

مستقيم (1) $8x_1 + 2x_2 = 40$

مستقيم (2) $6x_1 + 9x_2 = 108$

بضرب معادلة المستقيم (1) في 3 ومعادلة المستقيم (2) في -4 نجد:

$$\begin{array}{r} 24x_1 + 6x_2 = 120 \\ \underline{-24x_1 - 36x_2 = -432} \end{array}$$

بجمع المعادلتين نجد : $-30x_2 = -312$

ومنه يكون: $x_2 = \frac{-312}{-30} = 10.4$

بالتعويض في إحدى المعادلات نجد: $x_1 = 2.4$

وبالتالي فإن قيمتي المتغيرين اللذان يحققان أعلى قيمة للدالة الاقتصادية هما: $x_1 = 2.4$, $x_2 = 10.4$

يمكن التحقق من أن هذه النتيجة تحقق جميع القيود:

القيد الأول: $8 \times 2.4 + 2 \times 10.4 = 40$ قيد محقق تماما.

القيد الثاني: $6 \times 2.4 + 9 \times 10.4 = 108$ قيد محقق تماما.

القيد الثالث : $8 \times 2.4 + 26 \times 10.4 = 81.6 < 96$ قيد محقق وتبقى

طاقة غير مستعملة قيمتها 14.4 ساعة عمل.

ولمعرفة القيمة العظمى للدالة الاقتصادية يكفي أن نعوض القيمتين المحصـــل عليهما في هذه الدالة فنحصل على ما يلي: $Z = 100x_1 + 60x_2 = 100 \times 2.4 + 60 \times 10.4 = 864$

وهي أعلى قيمة للدالة الاقتصادية ولا يمكن أن توجد أية قيـــم أخرى للمتغيرتين تعطيان أعلى من هذه القيمة للدالة الاقتصادية وتحقق في نفس الوقت جميع القيود.

نظرية: إذا وجد حل أمثل لبرنامج خطي ذي متغيرتين، فإن هذا الحل يوجد عند أحد رؤوس مضـــلع منطقة الحل الممكن (راتول، 2008، صفحة 31).

مثال 2-2: أوجد حل أمثل للبرنامج التالي باستعمال الطريقة البيانية:

$$Min: Z = 10x_1 + 30x_2$$

$$S/C \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ 6x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_2 \geq 2 \\ x_1 \geq 0\,, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

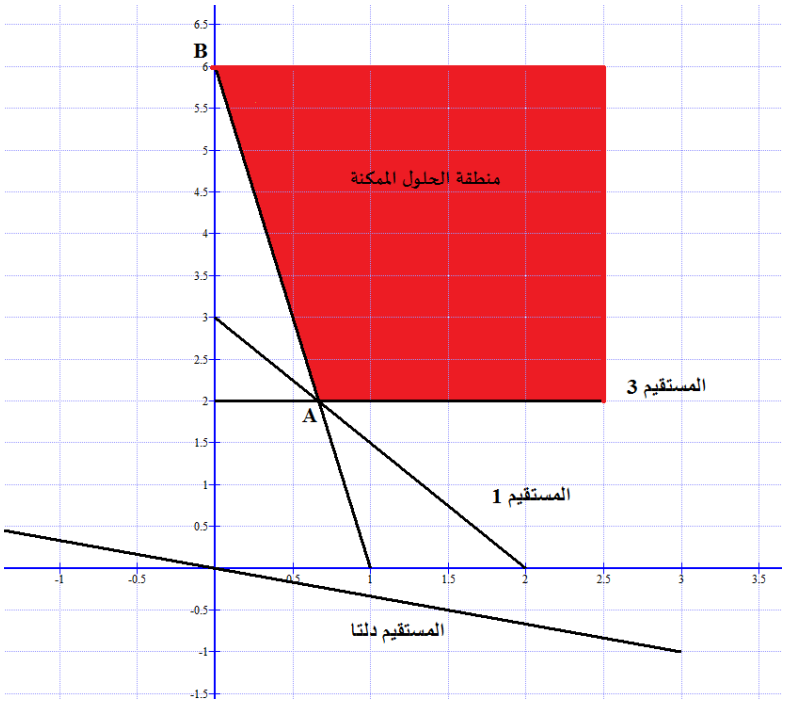
الحل: المستقيمات المولدة المحصل عليها هي:

$3x_1 + 2x_2 = 6$	$6x_1 + x_2 = 6$	$x_2 = 2$

المستقيم 3.	
$3x_1 + 2x_2 = 6$	
x_1	x_2
0	3
2	0

المستقيم 2.	
$6x_1 + x_2 = 6$	
x_1	x_2
0	6
1	0

المستقيم Δ.	
$Z = 10x_1 + 30x_2 = 0$	
x_1	x_2
3	-1
-3	1



شكل 2-3

ونمد خط موازي للمحور x_1 فيتقاطع مع المحور العـودي عنـد نقطة تحدد قيمة x_2 ، أو أن نحل معادلات هذه المستقيمات حلاً مشتركًا، وعليه نجد القيمتين التاليتين: $x_1 = 2/3 = 0.66$, $x_2 = 2$

وهما قيمتان تجعلان الدالة الاقتصـادية في أدنى قيمة لها وفي نفس الوقت تجعلان كل القيود محققة، حيث نجد القيمة العظمى للدالة الاقتصادية وهي:

$$Z = 10x_1 + 30x_2 = 10(0.66) + 30(2) = 66.66$$