حل التمرين **04** – السلسلة 03 (حل مسائل البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلكس **BIG M**)

إيجاد الحل المثلي بالطريقة المبسطة Simplex للبرنامج الخطي الموالي: حل بطريقة M الكبيرة – Big M

$Min\ Z = 4x_1 + x_2$ $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0 \end{cases}$	$Min\ Z = 4x_1 + x_2 + 0S_1 + 0S_2 + MR_1 + MR_2$ $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + R_1 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - S_1 + R_2 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + S_2 = 4 \\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ S_1 \geq 0;\ S_2 \geq 0;\ R_1 \geq 0;\ R_2 \geq 0 \end{cases}$

ملاحظة هامة: تستخدم المتغيرات الاصطناعية عند ظهور على الأقل قيد واحد على شكل (أكبر من أو يساوي) أو (يساوي) في مسألة البرمجة الخطية، وذلك من أجل الحصول على مصفوفة أحادية المعاملات للمتغيرات الإصطناعية (المتغيرات الاساسية أي العمود BV=Basic variables)، التي نبدأ بها الحل، حيث تضاف هذه المتغيرات إلى القيود بالرمز $(\boldsymbol{R_i})$ كما وتضاف إلى دالة الهدف بمعامل $(+\boldsymbol{M})$ عندما تكون دالة الهدف $(\boldsymbol{MIN})$ وتضاف بمعامل $(-\boldsymbol{M})$ عندما تكون دالة الهدف من نوع $(\boldsymbol{MAX})$، علما أن $(\boldsymbol{M})$ هو أكبر عدد صحيح موجب، وعلما بأن هناك طريقة أخرى لإستخدام $(\boldsymbol{R_i})$ تسمى طريقة المرحلتين.

يمكننا الآن صياغة جدول الحل الإبتدائي كما يلي:

		4	1	0	M	M	0		
	$\boldsymbol{BV}$	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2	$\boldsymbol{RHS}$	
M	R_1	**3**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**3**	$\frac{3}{3} = 1$
M	R_2	**4**	**3**	-1	**0**	**1**	**0**	**6**	$\frac{6}{4} = 1.5$
0	S_2	**1**	**2**	**0**	**0**	**0**	**1**	**4**	$\frac{4}{1} = 4$
	$\boldsymbol{Z}$	$7M$	$4M$	$-M$	M	$\boldsymbol{M}$	**0**	$9M$	
	$\boldsymbol{Z-C}$	$7M-4$	$4M-1$	$-M$	**0**	**0**	**0**		

أكبر قيمة موجبة في الصف $(\boldsymbol{Z-C})$ هي $(7M-4)$، بإفتراض طبعا أن أكبر قيمة موجبة، إذا فالمتغير الداخل هو (x_1) والمتغير الخارج هو (R_1) لأنه يحتوي على اصغر قيمة موجبة في العمود الاخير، ليصبح لدينا الجدول التالي:

		4	1	0	M	M	0		
	$\boldsymbol{BV}$	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2	$\boldsymbol{RHS}$	
4	x_1	$\frac{3}{3}=1$	$\frac{1}{3}$	$\frac{0}{3}=0$	$\frac{1}{3}$	$\frac{0}{3}=0$	$\frac{0}{3}=0$	$\frac{3}{3}=1$	$\frac{1}{\frac{1}{3}}=3$
M	R_2	$4-\frac{4\times 3}{3}=0$	$3-\frac{4\times 1}{3}=\frac{5}{3}$	$-1-\frac{4\times 0}{3}=-1$	$0-\frac{4\times 1}{3}=\frac{-4}{3}$	$1-\frac{4\times 0}{3}=1$	$0-\frac{4\times 0}{3}=0$	$6-\frac{4\times 3}{3}=2$	$\frac{2}{\frac{5}{3}}=\frac{6}{5}$
0	S_2	$1-\frac{1\times 3}{3}=0$	$2-\frac{1\times 1}{3}=\frac{5}{3}$	$0-\frac{1\times 0}{3}=0$	$0-\frac{1\times 1}{3}=\frac{-1}{3}$	$0-\frac{1\times 0}{3}=0$	$1-\frac{1\times 0}{3}=1$	$4-\frac{1\times 3}{3}=3$	$\frac{3}{\frac{5}{3}}=\frac{9}{5}$
	$\boldsymbol{Z}$	4	$\frac{4}{3}+\frac{5}{3}M$	$-M$	$\frac{4}{3}-\frac{4}{3}M$	$\boldsymbol{M}$	0	$4+2M$	
	$\boldsymbol{Z-C}$	0	$\frac{1}{3}+\frac{5}{3}M$	$-M$	$\frac{4}{3}-\frac{7}{3}M$	0	0		

العمود الخارج هو x_2 لأنه يحتوي على القيمة الموجبة الوحيدة في الصف الأخير بينما الصف الخارج هو R_2 لانه يحتوي على أقل قيمة موجبة ليصبح لدينا الجدول التالي:

		4	1	0	M	M	0	
	$\boldsymbol{BV}$	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2	$\boldsymbol{RHS}$
4	x_1	$\mathbf{1 - \frac{\frac{1}{3} \times 0}{\frac{5}{3}} = 1}$	$\mathbf{\frac{1}{3} - \frac{\frac{1}{3} \times \frac{5}{3}}{\frac{5}{3}} = 0}$	$\mathbf{0 - \frac{\frac{1}{3} \times (-1)}{\frac{5}{3}} = \frac{1}{5}}$	$\mathbf{\frac{1}{3} - \frac{\frac{1}{3} \times \left(\frac{-4}{3}\right)}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}}$	$\mathbf{0 - \frac{\frac{1}{3} \times 1}{\frac{5}{3}} = \frac{-1}{5}}$	$\mathbf{0 - \frac{\frac{1}{3} \times (0)}{\frac{5}{3}} = 0}$	$\mathbf{1 - \frac{\frac{1}{3} \times (2)}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}}$
1	x_2	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{\frac{-3}{5}}$	$\mathbf{\frac{-4}{5}}$	$\mathbf{\frac{3}{5}}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{\frac{6}{5}}$
0	S_2	$\mathbf{0 - \frac{\frac{5}{3} \times 0}{\frac{5}{3}} = 0}$	$\mathbf{\frac{5}{3} - \frac{\frac{5}{3} \times \frac{5}{3}}{\frac{5}{3}} = 0}$	$\mathbf{0 - \frac{\frac{5}{3} \times (-1)}{\frac{5}{3}} = 1}$	$\mathbf{\frac{-1}{3} - \frac{\frac{5}{3} \times \frac{-4}{3}}{\frac{5}{3}} = 1}$	$\mathbf{0 - \frac{\frac{5}{3} \times 1}{\frac{5}{3}} = -1}$	$\mathbf{1 - \frac{\frac{5}{3} \times 0}{\frac{5}{3}} = 1}$	$\mathbf{3 - \frac{\frac{5}{3} \times 2}{\frac{5}{3}} = 1}$
	$\boldsymbol{Z}$	4	$\mathbf{1}$	$\mathbf{\frac{1}{5}}$	$\mathbf{\frac{8}{5}}$	$\mathbf{\frac{-1}{5}}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{\frac{18}{5}}$
	$\boldsymbol{Z - C}$	0	$\mathbf{0}$	$\mathbf{\frac{1}{5}}$	$\mathbf{\frac{8}{5} - M}$	$\mathbf{\frac{-1}{5} - M}$	$\mathbf{0}$	

بما أنه مازال هناك قيم موجبة في السطر الأخير نلجأ إلى تحسين الحل بنفس الطريقة السابقة ليصبح لدينا الجدول النهائي كما يلي: (يمكن إعطاء الجدول الخير مباشرة دون حسابات)

		4	1	0	M	M	0	
	$\boldsymbol{BV}$	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2	$\boldsymbol{RHS}$
4	x_1	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}$	$\mathbf{0}$	$\frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{5}}$	$\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}$
1	x_2	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	$\frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{5}}$	$\mathbf{0}$	$\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}$	$\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{5}}$
0	S_1	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{-1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$
	$\boldsymbol{Z}$	4	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	$\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{5}}$	$\mathbf{0}$	$\frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{5}}$	$\frac{\mathbf{17}}{\mathbf{5}}$
	$\boldsymbol{Z - C}$	0	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{5}} - M$	$\boldsymbol{-M}$	$\frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{5}}$	

بما أن كل قيم الصف الاخير أصبح موجبة فالجدول نهائي و الحل أمثلي والحل الأمثلي هو:

$$\mathrm{x}_1 = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}} \quad , \quad \boldsymbol{x_2} = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{5}} \quad , \quad \mathbf{Z} = \frac{\mathbf{17}}{\mathbf{5}}$$