حل التمرين 03 – السلسلة 03 (حل مسائل البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلكس **BIG M**)

إيجاد الحل المثلي بالطريقة المبسطة Simplex للبرنامج الخطي الموالي: حل بطريقة M الكبيرة – Big M

$Min\ Z = 2x_1 + x_2$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 30 \\ 4x_1 + 2x_2 \geq 40 \\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0 \end{cases}$	$Min\ Z = 2x_1 + x_2 - 0S_1 - 0S_2 + MR_1 + MR_2$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - S_1 + R_1 = 30 \\ 4x_1 + 2x_2 - S_2 + R_2 = 40 \\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ S_1 \geq 0;\ S_2 \geq 0;\ R_1 \geq 0;\ R_2 \geq 0 \end{cases}$

من القيوم نستخرج قيمة المتغيرات الاصطناعية بدلالة بقية المتغيرات الأساسية والراكدة كما يلي:

$$R_1 = 30 - x_1 - 3x_2 + S_1$$

$$R_2 = 40 - 4x_1 - 2x_2 + S_2$$

بالتعويض بقيمة هذه المتغيرات الاصطناعية في دالة الهدف نجد:

$$Z = 2x_1 + x_2 - 0S_1 - 0S_2 + M(30 - x_1 - 3x_2 + S_1) + M(40 - 4x_1 - 2x_2 + S_2)$$

بإستخراج M كعامل مشترك نجد:

$$Z = 2x_1 + x_2 + M(30 - x_1 - 3x_2 + S_1 + 40 - 4x_1 - 2x_2 + S_2)$$

بالتبسيط نجد:

$$Z = 2x_1 + x_2 + M(70 - 5x_1 - 5x_2 + S_1 + S_2)$$

بالنشر نجد:

$$Z = 2x_1 + x_2 + 70M - 5Mx_1 - 5Mx_2 + MS_1 + MS_2$$

بإستخراج المتغيرات الاساسية كعوامل مشتركة نجد:

$$Z = (2 - 5M)x_1 + x_2(1 - 5M) + 70M + MS_1 + MS_2$$

نكتب الآن الثابت $70M$ بدلالة بقية كل المتغيرات الأساسية والاصطناعية والراكدة:

$$Z-(2-5M)x_1-x_2(1-5M)-MS_1-MS_2=70M$$

ندخل الإشارة السالبة الخاصة بالمتغيرات الأساسية داخل الأقواس للحصول على معاملاتهم كما يلي:

$$Z+(-2+5M)x_1+x_2(-1+5M)-MS_1-MS_2=70M$$

يمكننا الآن صياغة جدول الحل الإبتدائي كما يلي:

$\boldsymbol{BV}$	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2	
R_1	**1**	**3**	**−1**	**0**	**1**	**0**	**30**
R_2	**4**	**2**	**0**	**−1**	**0**	**1**	**40**
$\boldsymbol{Z}$	$-2+5M$	$-1+5M$	$-M$	$-M$	**0**	**0**	$70M$

نختار العمود الارتكازي الذي يحتوي على اكبر قيمة موجبة أي $-1+5M$ ، ليصبح لدينا x_2 هو العمود الداخل، ونقسم الآن قيم العمود الأيمن على معاملات العمود الارتكازي وندون النتائج في عمود إضافي على اليمين كما يلي:

$\boldsymbol{BV}$	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2		
R_1	**1**	**3**	**−1**	**0**	**1**	**0**	**30**	$\frac{30}{3}=10$
R_2	**4**	**2**	**0**	**−1**	**0**	**1**	**40**	$\frac{40}{2}=20$
$\boldsymbol{Z}$	$-2+5M$	$-1+5M$	$-M$	$-M$	**0**	**0**	$70M$	

ولكي نختار الصف الارتكازي نختار أصغر قيمة موجبة أي 10 ليصبح لدينا R_1 هو الصف الخارج

$\boldsymbol{BV}$	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2		
R_1	**1**	**3***	**−1**	**0**	**1**	**0**	**30**	$\frac{30}{3}=10$
R_2	**4**	**2**	**0**	**−1**	**0**	**1**	**40**	$\frac{40}{2}=20$
$\boldsymbol{Z}$	$-2+5M$	$-1+5M$	$-M$	$-M$	**0**	**0**	$70M$	

نطبق نفس قواعد السمبكلس التي تعرفنا عليهم في حالة التعظيم كما يلي:

BV	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2	
x_2	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{3}=1$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{0}{3}=0$	$\frac{1}{3}$	$\frac{0}{3}=0$	$\frac{30}{3}=10$
R_2	$4-\frac{2\times 1}{3}=\frac{10}{3}$	$2-\frac{2\times 3}{3}=0$	$0-\frac{2\times(-1)}{3}=\frac{2}{3}$	$-1-\frac{2\times 0}{3}=-1$	$0-\frac{2\times 1}{3}=\frac{-2}{3}$	$1-\frac{2\times 0}{3}=1$	$40-\frac{2\times 30}{3}=20$
Z	$-2+5M-\frac{(-1+5M)\times 1}{3}$ $=\frac{-5}{3}+\frac{10}{3}M$	$-1+5M-\frac{(-1+5M)\times 3}{3}=0$	$-M-\frac{(-1+5M)\times(-1)}{3}=\frac{-1}{3}+\frac{2}{3}M$	$-M-\frac{(-1+5M)\times 0}{3}=-M$	$0-\frac{(-1+5M)\times 1}{3}=\frac{1}{3}-\frac{5}{3}M$	$0-\frac{(-1+5M)\times 0}{3}=0$	$70M-\frac{(-1+5M)\times 30}{3}=10+20M$

بما أن في السطر الأخير لازال يوجد قيم موجبة فيجب علينا تحسين الحل، ونختار العمود الداخل الذي يحتوي على أكبر قيمة موجبة أي $\frac{-5}{3}+\frac{10}{3}M$ ليصبح لدينا x_1 هو العمود الداخل،

BV	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2	
x_2	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{-1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	10
R_2	$\frac{10}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	-1	$\frac{-2}{3}$	1	20
Z	$\frac{-5}{3}+\frac{10}{3}M$	0	$\frac{-1}{3}+\frac{2}{3}M$	$-M$	$\frac{1}{3}-\frac{5}{3}M$	0	$10+20M$

ونقسم الآن قيم العمود الأيمن على معاملات العمود الارتكازي وندون النتائج في عمود إضافي على اليمين كما يلي:

BV	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2		
x_2	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{-1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	10	$\frac{10}{\frac{1}{3}} = 30$
R_2	$\frac{10}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	-1	$\frac{-2}{3}$	1	20	$\frac{20}{\frac{10}{3}} = 6$
Z	$\frac{-5}{3} + \frac{10}{3}M$	0	$\frac{-1}{3} + \frac{2}{3}M$	$-M$	$\frac{1}{3} - \frac{5}{3}M$	0	$10 + 20M$	

ولكي نختار الصف الارتكازي نختار أصغر قيمة موجبة أي 6 ليصبح لدينا R_2 هو الصف الخارج:

BV	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2		
x_2	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{-1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	10	30
R_2	$\frac{10}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	-1	$\frac{-2}{3}$	1	20	6
Z	$\frac{-5}{3} + \frac{10}{3}M$	0	$\frac{-1}{3} + \frac{2}{3}M$	$-M$	$\frac{1}{3} - \frac{5}{3}M$	0	$10 + 20M$	

نطبق نفس قواعد السمبكلس التي تعرفنا عليهم في حالة التعظيم كما يلي:

BV	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2	
x_2	$\frac{1}{3}-\frac{\frac{1}{3}-\frac{10}{3}}{\frac{10}{3}}=0$	$1-\frac{\frac{1}{3}-0}{\frac{10}{3}}=1$	$\frac{1}{3}-\frac{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}}{\frac{10}{3}}=\frac{5}{10}$	$0-\frac{\frac{1}{3}-(-1)}{\frac{10}{3}}=\frac{1}{10}$	$\frac{1}{3}-\frac{\frac{1}{3}-\left(\frac{-2}{3}\right)}{\frac{10}{3}}=\frac{5}{10}$	$0-\frac{\frac{1}{3}-1}{\frac{10}{3}}=\frac{-1}{10}$	$10-\frac{\frac{1}{3}-20}{\frac{10}{3}}=8$
x_1	$\frac{\frac{10}{3}}{\frac{10}{3}}=1$	$\frac{0}{\frac{10}{3}}=0$	$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{10}{3}}=\frac{5}{10}$	$\frac{-3}{\frac{10}{3}}=\frac{-1}{10}$	$\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{10}{3}}=\frac{-1}{5}$	$\frac{\frac{3}{3}}{\frac{10}{3}}=\frac{1}{10}$	$\frac{20}{\frac{10}{3}}=6$
Z	$-5+\frac{10}{3}M-\frac{\left(\frac{-5}{3}+\frac{10}{3}M\right)-\frac{10}{3}}{\frac{10}{3}}=0$	$0-\frac{\left(\frac{-5}{3}+\frac{10}{3}M\right)-0}{\frac{10}{3}}=0$	$\frac{-1}{3}+\frac{2}{3}M-\frac{\left(\frac{-5}{3}+\frac{10}{3}M\right)-\frac{2}{3}}{\frac{10}{3}}=0$	$-M-\frac{\left(\frac{-5}{3}+\frac{10}{3}M\right)-(-1)}{\frac{10}{3}}=\frac{-1}{2}$	$1\frac{5}{3}-\frac{5}{3}M-\frac{\left(\frac{-5}{3}+\frac{10}{3}M\right)-\left(\frac{-2}{3}\right)}{\frac{10}{3}}=-M$	$0-\frac{\left(\frac{-5}{3}+\frac{10}{3}M\right)-(1)}{\frac{10}{3}}=\frac{1}{2}-M$	$10+20M-\frac{\left(\frac{-5}{3}+\frac{10}{3}M\right)-20}{\frac{10}{3}}=20$

بما أنه لا يوجد قيم موجبة في السطر الأخير فالجدول لا يحتاج إلى تحسين وهذا هو الحل الأمثلي وهو:

$$x_1 = 6 \quad , \quad x_2 = 8 \quad , \quad Z = 20$$