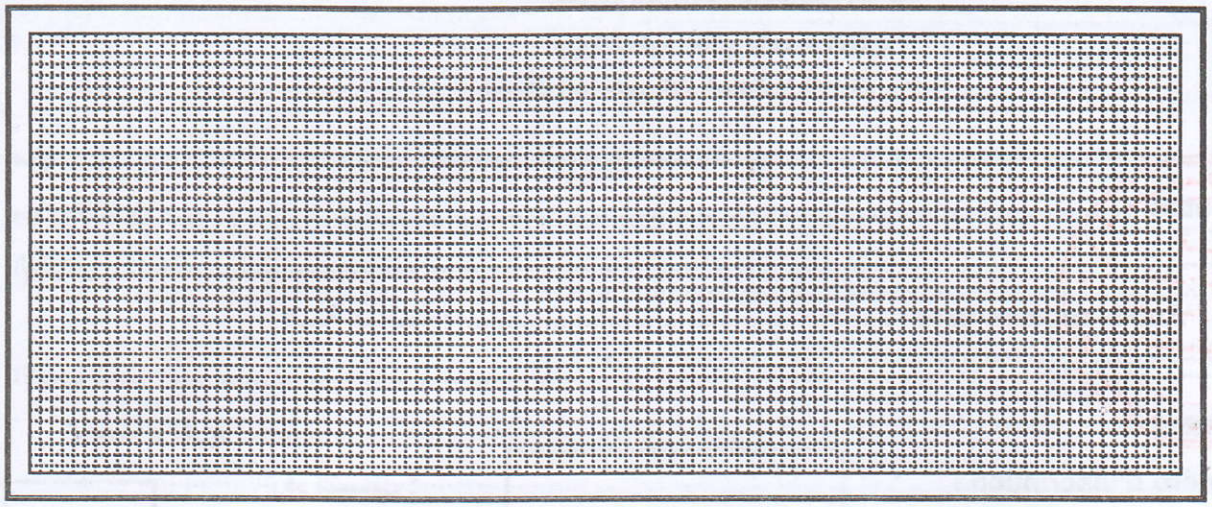


الحل النموذجي لامتحان السداسي الثاني

حل التمرين الأول (05)

$I=[1,2]$ / $\varepsilon=0,01$ / $f(x)=x^2+3e^x-12$

1/ كتابة المعادلة $f(x)=0$ على الشكل $x=g(x)$

$$x=x^2+3e^x-12+x=g_1(x)$$
$$x=\sqrt{12-3e^x}=g_2(x) \quad (1,5)$$
$$x=\ln\left(\frac{12-x^2}{3}\right)=g_3(x)$$

2/ دراسة شروط التقارب:

$k=\max_{x\in[1,2]}|g'(x)|<1$

- $g_1(x)=x^2+3e^x-12+x \Rightarrow g_1'(x)=2x+3e^x+1$ (متزايدة تماما)
  $g_1'(2)=2\cdot 2+3e^2+1=27,16>1$ (غير متقاربة)
- $g_2(x)=\sqrt{12-3e^x} \Rightarrow g_2'=\frac{-3e^x}{2\sqrt{12-3e^x}}$ (متناقصة تماما على I)
  $g_2'(1)=\frac{-3\cdot e}{2\sqrt{12-3e}}=-2,08 \Rightarrow \max|g_2'(x)|=2,08>1$ (1,5)
  غير متقاربة
- $g_3(x)=\ln\left(\frac{12-x^2}{3}\right) \Rightarrow g_3'(x)=\frac{\frac{1}{3}(-2x)}{\frac{1}{3}(12-x^2)}=\frac{-2x}{12-x^2}<0$ (متناقصة تماما على I)

$g'(x) = -\frac{2}{11}x \Rightarrow g'(1) = -0,18$, $g'(2) = -0,5 \Rightarrow k = \max_{x\in[1,2]} |g'(x)| = 0,5 < 1$

إذن $g_3(x)$ متقاربة

3 تطبيق طريقة النقطة الثابتة

$$x_{n+1} = g_3(x_n) = \ln\left(\frac{12-x_n^2}{3}\right)$$

$n=0 \Rightarrow x_0 = 1,5$ (متوقف إجبارياً) $\Rightarrow x_1 = g_3(x_0) = \ln\left(\frac{12-(1,5)^2}{3}\right) = 1,179$ (0,5)

$|x_1 - x_0| = 0,321 > 0,01$

$n=1 \Rightarrow x_2 = g_3(x_1) \Rightarrow x_2 = \ln\left(\frac{12-(x_1)^2}{3}\right) = 1,263$ (0,5)

$|x_2 - x_1| = 0,084 > 0,01$

$n=2 \Rightarrow x_3 = g_3(x_2) \Rightarrow x_3 = \ln\left(\frac{12-(x_2)^2}{3}\right) = 1,244$ (0,5)

$|x_3 - x_2| = 0,019 > 0,01$

$n=3 \Rightarrow x_4 = g_3(x_3) \Rightarrow x_4 = \ln\left(\frac{12-(x_3)^2}{3}\right) = 1,248$ (0,5)

$|x_4 - x_3| = 0,004 < 0,01$

$x_3 = 1,244$ هو الحل

(05) حل التمرين الثاني:

b) $\int_a^b f(x) = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]$ صيغة شبه المنحرف

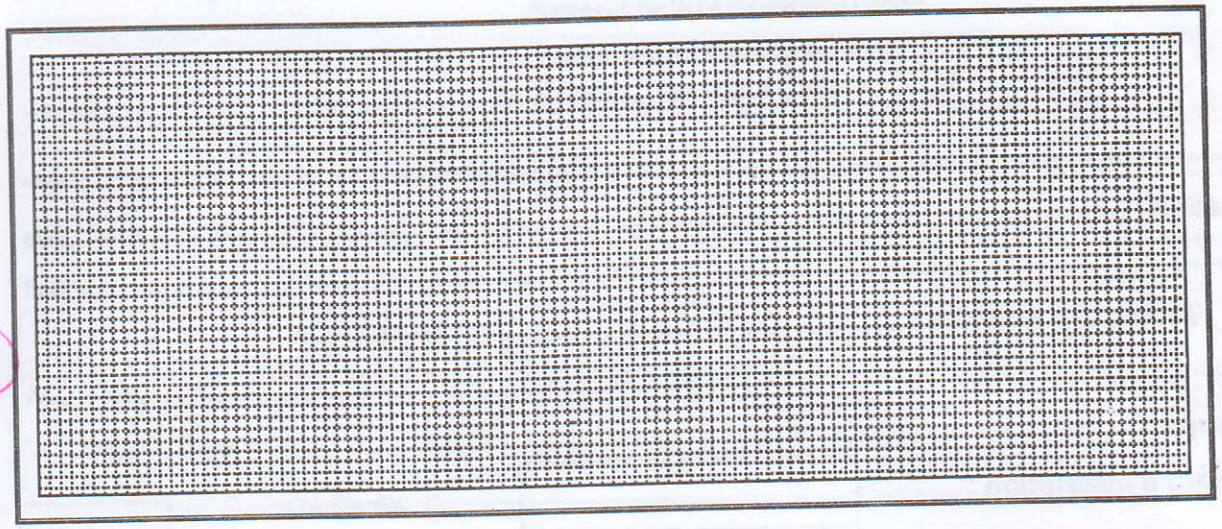
$x_0 = 1 \Rightarrow x_1 = x_0 + h = 1,2$

$\Rightarrow x_2 = x_1 + h = 1,4$

$\Rightarrow x_3 = x_2 + h = 1,6$

$\Rightarrow x_4 = x_3 + h = 1,8$

$\Rightarrow x_5 = x_4 + h = 2$



$$I_T = \frac{h}{2}\left[\ln(1) + \ln(2) + 2\left[\ln(1.2) + \ln(1.4) + \ln(1.6) + \ln(1.8)\right]\right]$$

(2)

$$= 0.3846315$$

الطريقة المضبوطة:

$$\int \ln(x) = x\ln x - x + C$$

(0.1)

$$I_E = \left[x\ln x - x\right]_1^2 = (2\ln 2 - 2) - (1\ln 1 - 1) = 0.3862944$$

خطأ الحساب

(0.1)

$$\Delta I = |I_{exact} - I_{trap}|$$

$$= 0.3846315 - 0.3862944 = 0.0016629$$

2/ البرهان من العبارة

لدينا: $f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{x^2}$

متناقصة (لأن $\log_a$ أ...)

$$\max_{x\in[1,2]} |f''(x)| = 1$$

$$\frac{b-a}{12} h^2 \max|f''(x)| = \frac{2-1}{12}(0.2)^2 \cdot 1 = 0.00333$$

(0.1)

$$|I_{exact} - I_{trap}| \leq \frac{b-a}{12} h^2 \max|f''(x)|$$ ...

حل التمرين الثالث

$f(x,y) = -y + x + 1$

$x_0 = 0$ ، $y_0 = 1$ ، $h = 0,1$

$x_1 = x_0 + h = 0,1 \Rightarrow y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0) = 1 + 0,1(-1+0+1) = 1$ (01)

$x_2 = x_1 + h = 0,2 \Rightarrow y_2 = y_1 + h f(x_1, y_1) = 1 + 0,1(-1+0,1+1) = 1,01$ (01)

$x_3 = x_2 + h = 0,3 \Rightarrow y_3 = y_2 + h f(x_2, y_2) = 1,01 + 0,1(-1,01+0,2+1) = 1,029$ (01)

$x_4 = x_3 + h = 0,4 \Rightarrow y_4 = y_3 + h f(x_3, y_2) = 1,029 + 0,1(-1,029+0,3+1) = 1,0561$

$y_4 = y(0,4) = 1,0561$ (01)

$y(0,4) = 0,4 + e^{0,4} = 1,07032$: القيمة الحقيقية

(01)

حل التمرين 04

1) حساب الأربع تكرارات الأولى بطريقة "Jacobi" :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{ij} x_j^k \right), \quad i = 1, \dots, n$$

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \frac{1}{a_{11}} \left(b_1 - (a_{12} x_2^k + a_{13} x_3^k) \right) \\ x_2^{k+1} = \frac{1}{a_{22}} \left(b_2 - (a_{21} x_1^k + a_{23} x_3^k) \right) \\ x_3^{k+1} = \frac{1}{a_{33}} \left(b_3 - (a_{31} x_1^k + a_{32} x_2^k) \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^{k+1} = \frac{1}{2} \left(1 + x_2^k \right) \\ x_2^{k+1} = \frac{1}{4} \left(1 + x_1^k + x_3^k \right) \\ x_3^{k+1} = \frac{1}{2} \left(1 + x_2^k \right) \end{cases}$$

02

k	0	1	2	3	4
x_1	0	1/2	5/8	3/4	25/32
x_2	0	1/4	1/2	9/16	5/8
x_3	0	1/2	5/8	3/4	25/32

01 01 01