Centre universitaire Abdelhafid Boussouf, Mila
Institut des Sciences et Technologies
Département de génie mécanique et d'électromécanique
Transfert de chaleur II
Pr. S. Saouli

Examen final

Transfert de chaleur II

Durée : 1h 30 mn

Exercice n°1 (4 points)

Ecrire le nombre de Reynolds Re_R en fonction du rayon pour l'écoulement d'un fluide newtonien de débit massique $\dot{m}$ dans un tube de section circulaire de rayon R.

Exercice n°2 (5 points)

Si le profil de vitesse adimensionnel choisi est tel que $\dfrac{U_x(y)}{U_\infty} = \alpha + \beta \dfrac{y}{\delta_V(x)}$

a) Déterminer les constantes α et β à partir de conditions aux limites appropriées.
b) Calculer l'épaisseur de la couche limite visqueuse $\delta_V(x)$.

Rappel :
$$U_\infty^2 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta_V(x)} \frac{U_x(y)}{U_\infty}\left(1 - \frac{U_x(y)}{U_\infty}\right) dy = \frac{\tau_P}{\rho}$$

Exercice n°3(11 points)

L'équation de continuité et l'équation de la quantité du mouvement pour la couche limite visqueuse sur une plaque plane sont

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0$$

$$V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}$$

En introduisant les grandeurs adimensionnelles suivantes

$$\overline{V}_x = \frac{\rho L}{\mu} V_x,\ \overline{V}_y = \frac{\rho L}{\mu} V_y,\ \overline{x} = \frac{x}{L},\ \overline{y} = \frac{y}{L},\ \overline{P} = \frac{P}{\rho\left(\frac{\nu}{L}\right)^2}$$

a) Trouver les formes adimensionnelles de l'équation de continuité et de l'équation de la quantité du mouvement.
b) Si le coefficient de frottement pariétal Cf_P est défini par $Cf_P = \dfrac{\tau_P}{\rho\left(\frac{\nu}{L}\right)^2}$, trouver son expression.

Corrigé type de l'examen final

Transfert de chaleur II

Durée : 1h 30 mn

Exercice n°1(4 points)

Le nombre de Reynolds dans un tube circulaire de rayon R est

$$\mathrm{Re}_R = \frac{\rho \overline{U} D}{\mu} = \frac{2\rho \overline{U} R}{\mu} \quad \boxed{1.0}$$

le débit massique $\dot{m}$ est lié à la vitesse moyenne par la relation

$$\dot{m} = \rho \overline{U} S = \rho \overline{U} \pi R^2 \quad \boxed{1.0}$$

en éliminant la vitesse moyenne entre ces deux relations, nous obtenons

$$\mathrm{Re}_R = \frac{2\rho R}{\mu} \frac{\dot{m}}{\rho \pi R^2} = \frac{2\dot{m}}{\mu \pi R} \quad \boxed{2.0}$$

Exercice n°2 (5 points)

c) Nous avons $\frac{U_x}{U_\infty} = \alpha + \beta \frac{y}{\delta_V(x)}$, les conditions aux limites sont

$$y = 0, U_x = 0 \quad \boxed{0,5}$$

$$y = \delta_V, U_x = U_\infty \quad \boxed{0,5}$$

d'où

$$\alpha = 0, \beta = 1 \quad \boxed{1,0}$$

et de là, nous trouvons

$$\frac{U_x}{U_\infty} = \frac{y}{\delta_V(x)} \quad \boxed{0,5}$$

d) Avant d'utiliser la relation $U_\infty^2 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta_V(x)} \frac{U_x}{U_\infty}\left(1 - \frac{U_x}{U_\infty}\right) dy = \frac{\tau_P}{\rho}$, nous avons

$$\int_0^{\delta_V(x)} \frac{U_x}{U_\infty}\left(1 - \frac{U_x}{U_\infty}\right) dy = \int_0^{\delta_V(x)} \frac{y}{\delta_V(x)}\left[1 - \frac{y}{\delta_V(x)}\right] dy =$$

$$\int_0^{\delta_V(x)} \left[\frac{y}{\delta_V(x)} - \left(\frac{y}{\delta_V(x)}\right)^2\right] dy = \left[\frac{y^2}{2\delta_V(x)} - \frac{1}{3}\frac{y^3}{\delta_V^2(x)}\right]_0^{\delta_V(x)}$$

soit

$$\int_0^{\delta_V(x)} \frac{U_x}{U_\infty}\left(1-\frac{V_x}{V_\infty}\right)dy = \frac{(3-2)}{6}\delta_V(x) = \frac{1}{6}\delta_V(x) \quad \boxed{0{,}5}$$

avec

$$\tau_P = \frac{\mu U_\infty}{\delta_V(x)} \quad \boxed{0{,}5}$$

nous obtenons

$$U_\infty^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{6}\delta_V(x)\right) = \frac{\mu U_\infty}{\rho \delta_V(x)}$$

$$\frac{d\delta_V(x)}{dx} = \frac{6\mu}{\rho U_\infty \delta_V(x)}$$

$$\delta_V(x)d\delta_V(x) = d\left(\frac{1}{2}\delta_V^2(x)\right) = \frac{6\mu}{\rho U_\infty}dx \quad \boxed{0{,}5}$$

d'où

$$\delta_V(x) = \frac{\sqrt{12}\,x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} = \frac{3{,}46\,x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \quad \boxed{1.0}$$

Exercice n°3 (11 points)

a) Formes adimensionnelle de l'équation de continuité et de l'équation de la quantité du mouvement.

A partir des grandeurs $\overline{V}_x = \frac{\rho L}{\mu}V_x$, $\overline{V}_y = \frac{\rho L}{\mu}V_y$, $\overline{x} = \frac{x}{L}$, $\overline{y} = \frac{y}{L}$, $\overline{P} = \frac{P}{\rho\left(\frac{\nu}{L}\right)^2}$, nous avons

$$V_x = \frac{\mu}{\rho L}\overline{V}_x,\ V_y = \frac{\mu}{\rho L}\overline{V}_y,\ x = L\overline{x},\ y = L\overline{y},\ P = \rho\left(\frac{\nu}{L}\right)^2\overline{P} \quad \boxed{2.5}$$

en substituant ces termes dans l'équation de continuité et l'équation de la quantité du mouvement, nous obtenons

$$\frac{\partial\left(\frac{\mu}{\rho L}\overline{V}_x\right)}{\partial(L\overline{x})} + \frac{\partial\left(\frac{\mu}{\rho L}\overline{V}_y\right)}{\partial(L\overline{y})} = 0 \quad \boxed{0.5}$$

$$\frac{\mu}{\rho L}\overline{V}_x \frac{\partial\left(\frac{\mu}{\rho L}\overline{V}_x\right)}{\partial\left(L\overline{x}\right)}+\frac{\mu}{\rho L}\overline{V}_y \frac{\partial\left(\frac{\mu}{\rho L}\overline{V}_x\right)}{\partial\left(L\overline{y}\right)}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho\left(\frac{\nu}{L}\right)^2\overline{P}\right)}{\partial\left(L\overline{x}\right)}+\nu\frac{\partial^2\left(\frac{\mu}{\rho L}\overline{V}_x\right)}{\partial\left(L\overline{y}\right)^2} \qquad \boxed{0.5}$$

soient

$$\frac{\mu}{\rho L^2}\frac{\partial\overline{V}_x}{\partial\overline{x}}+\frac{\mu}{\rho L^2}\frac{\partial\overline{V}_y}{\partial\overline{y}}=0 \qquad \boxed{1.0}$$

$$\frac{\mu^2}{\rho^2L^3}\overline{V}_x\frac{\partial\overline{V}_x}{\partial\overline{x}}+\frac{\mu^2}{\rho^2L^3}\overline{V}_y\frac{\partial\overline{V}_x}{\partial\overline{y}}=-\frac{\mu^2}{\rho^2L^3}\frac{\partial\overline{P}}{\partial\overline{x}}+\frac{\mu^2}{\rho^2L^3}\frac{\partial^2\overline{V}_x}{\partial\overline{y}^2} \qquad \boxed{1.0}$$

En multipliant la première équation par $\frac{\rho L^2}{\mu}$ et la seconde équation par $\frac{\rho^2L^3}{\mu^2}$, nous obtenons

$$\frac{\partial\overline{V}_x}{\partial\overline{x}}+\frac{\partial\overline{V}_y}{\partial\overline{y}}=0 \qquad \boxed{1.0}$$

$$\overline{V}_x\frac{\partial\overline{V}_x}{\partial\overline{x}}+\overline{V}_y\frac{\partial\overline{V}_x}{\partial\overline{y}}=-\frac{\partial\overline{P}}{\partial\overline{x}}+\frac{\partial^2\overline{V}_x}{\partial\overline{y}^2} \qquad \boxed{1.0}$$

b) Le coefficient de frottement pariétal est $Cf_P=\frac{\tau_P}{\rho\left(\frac{\nu}{L}\right)^2}$, calculons tout d'abord la contrainte de cisaillement pariétale τ_P, soit

$$\tau_P=\mu\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)_{y=0}=\mu\left[\frac{\partial\left(\frac{\mu}{\rho L}\overline{V}_x\right)}{\partial\left(L\overline{y}\right)}\right]_{\overline{y}=0}=\frac{\mu^2}{\rho L^2}\left(\frac{\partial\overline{V}_x}{\partial\overline{y}}\right)_{\overline{y}=0} \qquad \boxed{1.0}$$

en substituant cette expression dans la relation du coefficient de frottement pariétal, nous obtenons

$$Cf_P=\frac{\frac{\mu^2}{\rho L^2}\left(\frac{\partial\overline{V}_x}{\partial\overline{y}}\right)_{\overline{y}=0}}{\rho\left(\frac{\nu}{L}\right)^2}=\left(\frac{\partial\overline{V}_x}{\partial\overline{y}}\right)_{\overline{y}=0} \qquad \boxed{2.5}$$