

5.5 Série N=05 : Méthodes duales en programmation linéaire

Exercice 01 :

Formuler le problème dual de chacun des programmes linéaires suivants :

$$\begin{array}{ll}
 \text{(P1)} \quad \begin{array}{l} \text{Max } Z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ \text{S.C } \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 60 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 40 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 80 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{array} & \text{(P2)} \quad \begin{array}{l} \text{Max } Z = 3x_1 + x_2 - 2x_3 \\ \text{S.C } \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 3x_3 \leq 8 \\ x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{array} \\
 \text{(P3)} \quad \begin{array}{l} \text{Min } Z = 10x_1 + 14x_2 \\ \text{S.C } \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 12 \\ x_1 \geq 8 \\ x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{array} & \text{(P4)} \quad \begin{array}{l} \text{Max } Z = 400x_1 + 350x_2 + 450x_3 \\ \text{S.C } \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leq 120 \\ 4x_1 + 3x_2 = 160 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \geq 100 \\ x_1, x_3 \in \mathbb{R}, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{array}
 \end{array}$$

Exercice 02 :

Appliquer le théorème des écarts complémentaires vus en cours pour vérifier l'optimalité de la solution proposée.

$$\begin{array}{ll}
 \text{(P1)} \quad \begin{array}{l} \text{Max } Z = 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 \\ \text{S.C } \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 2x_5 \leq 4 \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 \leq 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 5x_5 \leq 5 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 \leq 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \end{array} & \text{(P2)} \quad \begin{array}{l} \text{Max } Z = 4x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 - 5x_5 + 8x_6 \\ \text{S.C } \begin{cases} x_1 - 4x_3 + 3x_4 + x_5 + x_6 \leq 1 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_5 + 3x_6 \leq 4 \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 3x_4 - 4x_5 + x_6 \leq 4 \\ -x_2 + 2x_4 + x_5 - 5x_6 \leq 5 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + 2x_6 \leq 7 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 4x_5 + 5x_6 \leq 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases} \end{array}
 \end{array}$$

Solution proposée (P1) : $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0)$

Solution proposée (P2) : $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 0, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, 0, \frac{1}{2})$.

Exercice 03 :

Considérons le programme linéaire suivant

$$\begin{array}{l}
 \text{Max } Z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\
 \text{S.C } \begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 30 \\ x_1 - 5x_2 - 6x_3 \leq 40 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}
 \end{array}$$

La solution optimale est donnée par le dictionnaire final max Z

$$\begin{array}{l}
 Z + 23x_2 + 7x_3 = 150 \\
 \text{S.C } \begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 30 \\ -10x_2 - 8x_3 + e_2 = 10 \\ x_1, e_2 \geq 0 \end{cases}
 \end{array}$$

1) Écrivez le problème dual associé.