Chapitre 4

Méthodes Duales en Programmation Linéaire

4.1 Introduction

A tout programme linéaire, appelé par convention PL primal, on peut associer un autre PL appelé son dual. Dans ce chapitre, on va étudier des notions relatives aux programmes linéaires tels que le programme primal, le programme dual, et l'utilisation pratique des conditions d'optimalité primal-dual (COPD).

4.2 Dualité

Avant de donner la définition formelle d'un problème dual, nous allons expliquer comment il s'explique en termes de problème de production.
Problème de la production : Deux produits P1 et P2 fabriques en quantité x_1 et x_2, nécessitant trois ressources disponibles en quantités données. L'entreprise cherche à maximiser le bénéfice total provenant de la vente des deux (2) produits :

$$Max\ Z(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2$$
$$S.C \begin{cases} 3x_1 + 9x_2 \leqslant 81 \\ 4x_1 + 5x_2 \leqslant 55 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 20 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Supposons à présent qu'un acheteur se présente pour acheter toutes les ressources de l'entreprise. Il propose à l'entreprise les prix unitaires y_1, y_2, y_3 pour chacune des ressources.

- L'entreprise acceptera de lui vendre toutes ses ressources uniquement si elle obtient pour chaque produit un prix de vente au moins égal au profit qu'elle ferait en vendant ses produits.
- De son côté, l'acheteur cherche à minimiser ses dépenses.

Quels prix unitaires y_1, y_2, y_3 l'acheteur doit-il proposer à l'entreprise en question pour qu'elle accepte de vendre toutes ses ressources ?

Donc le programme linéaire correspondant est le suivant :

$$Min\ G(y_1, y_2, y_3) = 81y_1 + 55y_2 + 20y_3$$
$$S.C \begin{cases} 3y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geqslant 6 \\ 9y_1 + 5y_2 + y_3 \geqslant 4 \\ y_1 \geqslant 0, y_2 \geqslant 0, y_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

4.2.1 Définition (Problème primal et dual)

La forme d'un programme linéaire de type maximisation est :

$$Max\ Z(x) = c^T.x \qquad S.C \begin{cases} Ax \leqslant b \\ x \geqslant 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

Avec x, b, c des vecteurs de dimensions respectives n, m, n, et A une matrice de dimension (m, n)

On appelle programme dual de (PL), le programme linéaire suivant :

$$Min\ G(x) = b^T.y \qquad S.C \begin{cases} A^T.y \geqslant c \\ y \geqslant 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

Avec y un vecteur de dimension m et A^T la transposée de la matrice A. Le programme de l'équation 4.1 est appelé programme Primal (PL).

Pour passer du primal au dual, on remarque que :

1) Les termes du second membre deviennent les coefficients de la fonction objectif et réciproquement.
2) Le problème de maximisation devient un problème de minimisation.
3) Les inégalités "$\leqslant$" deviennent des inégalités "$\geqslant$".

La matrice A se transforme en sa transposée.

Dans ce contexte, (PL) est appelé problème primal de le problème dual (PLD). Remarquons que, si (PL) comporte n variables et m contraintes, alors (PLD) comporte m variables et n contraintes (une variable par contrainte de (PL), et une contrainte par variable de (PLD)).

Proposition 4.2.1 *Le dual du dual est le primal.*

Preuve : Dual d'un (PL) sous forme canonique pure :

$$(PLD) \quad \begin{matrix} Min\ G(y) = b^T y \\ S.C \begin{cases} A^T y \geqslant c \\ y \geqslant 0 \end{cases} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} Max\ -G(y) = (-b)^T y \\ S.C \begin{cases} -A^T y \leqslant -c \\ y \geqslant 0 \end{cases} \end{matrix}$$

On prend le dual du dual :

$$\begin{matrix} Min\ [(-c)^T x] \\ S.C \begin{cases} (-A^T)^T x \geqslant -b \\ y \geqslant 0 \end{cases} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} Max\ [c^T x] \\ S.C \begin{cases} Ax \leqslant b \\ y \geqslant 0 \end{cases} \end{matrix} \quad (PL)$$

Existe-t-il une relation entre les valeurs optimales de (PL) et de (PLD) ? Le théorème suivant apporte une première réponse à cette question.

Théorème 4.2.1 (Théorème faible de dualité) *Soit x une solution réalisable d'un (PL) sous forme canonique mixte et y une solution réalisable du problème dual (PLD). Alors :*

1) $Z(x) \leqslant G(y)$.

2) Si $Z(x) = G(y)$ *alors x et y sont des solutions optimales de (PL) et (PLD) respectivement.*

Preuve : (PL) sous forme canonique pure

- On a $Ax \leqslant b, x \geqslant 0$ et $A^T y \geqslant c, y \geqslant 0$
  $Z(x) = c^T x \leqslant (A^T y)^T x = y^T \underbrace{Ax}_{\leqslant b} \leqslant y^T b = G(y)$
- Soient x^* et y^* des solutions réalisables de (PL) et (PLD) telles que $Z(x^*) = G(y^*)$. D'après 1), pour x solution réalisable de (PL), on a $Z(x) \leqslant G(y^*) = F(x^*)$ donc x^* est une solution réalisable optimale. Idem pour y^*.

Théorème 4.2.2 (Théorème fort de dualité) *Si le problème primal (PL) admet une solution réalisable optimale* x^* *alors le problème dual (PLD) admet lui aussi une solution réalisable optimale* y^* *et on a* $Z(x^*) = G(y^*)$.

Preuve : On suppose (PL) mis sous forme standard.

S'il existe une solution réalisable optimale, alors il existe une **solution de base** réalisable optimale

$$x_{B^*} = A_{B^*}^{-1} b.$$

On choisit alors

$$y^* = (A_{B^*}^{-1})^T C_{B^*}$$

On montre que y^* est une solution réalisable optimale pour le dual (PLD).

- Avec $y^* = (A_{B^*}^{-1})^T c_{B^*}$, on a

  $$A_{H^*}^T y^* = A_{H^*}^T (A_{B^*}^{-1})^T c_{B^*} = (A_{B^*}^{-1} A_{H^*}^T)^T c_{B^*} = c_{H^*} - L_{H^*}$$

  Or, à l'optimum $L_{H^*} \leqslant 0$ donc $A_{H^*}^T y^* \geqslant c_{H^*}$. Puisque

  $$A_{B^*}^T y^* = c_{B^*},$$

  On a

  $$A^T y^* \geqslant c$$

  $y*$ de signe quelconque. i.e. est une solution réalisable du dual (PLD) (pas de contrainte de positivité sur les variable y du dual).
- $Z(x^*) = c^T x^* = c_{B^*}^T A_{B^*}^{-1} b = ((A_{B^*}^{-1})^T c_{B^*})^T b = G(y^*)$
  Théorème faible de dualité $\Rightarrow$ y^* est optimal pour (PLD).

4.2.2 Lien primal/dual

Rappel : 3 cas possibles (et seulement 3) pour le problème primal (PL) :

1) Il existe (au moins) une solution optimale.
2) L'ensemble D_R des solutions réalisables n'est pas borné et l'optimum est infini.
3) Pas de solution réalisable ($D_R = \varnothing$).

Théorème 4.2.3 *Étant donnés un problème primal (PL) et son dual (PLD), une et une seule des trois situations suivantes a lieu*

TABLE 4.1 – Situations Primal - Dual

		Dual		
		(1) Solution optimale	*(2) Optimum infini*	*(3) pas de solution*
Primal	*(1) Solution optimale*	(a)	impossible	impossible
	(2) Optimum infini	impossible	impossible	(b)
	(3) pas de solution	impossible	(b)	(c)

TABLE 4.2 – Correspondance Primal - Dual

Min	**Max**
* Matrice des contraintes (m, n)	* Transposée de la matrice des contraintes (n, m)
* Second membre des contraintes	* Coefficient de la fonction objectif
* Coefficient de la fonction objectif	* Second membre des contraintes
Nombre de contraintes	**Nombre de variables principales**
i$^{\text{ème}}$ contrainte de type $'' \leqslant ''$	i$^{\text{ème}}$ variable de type $'' \geqslant ''$
i$^{\text{ème}}$ contrainte de type $'' \geqslant ''$	i$^{\text{ème}}$ variable de type $'' \leqslant ''$
i$^{\text{ème}}$ contrainte de type $'' = ''$	i ème variable qcq $''\in \mathbb{R}''$
Nombre de variables	**Nombre de contraintes**
j$^{\text{ème}}$ variable $'' \geqslant ''$	j$^{\text{ème}}$ contrainte de type $'' \geqslant ''$
j$^{\text{ème}}$ variable $'' \leqslant ''$	j$^{\text{ème}}$ contrainte de type $'' \leqslant ''$
j$^{\text{ème}}$ variable qcq $'' \in \mathbb{R}''$	j$^{\text{ème}}$ contrainte de type $'' = ''$

1) *les deux problèmes possèdent chacun des solutions optimales (à l'optimum, les coûts sont égaux).*
2) *un des problèmes possède une solution réalisable avec un optimum infini, l'autre n'a pas de solution.*
3) *aucun des deux problèmes ne possède de solution réalisable.*

Il y a donc 3 situations (au lieu de 9) qui peuvent se résumer dans le tableau 4.1 :

Exemple 1

Primal	**Dual**
$Max\ Z = \frac{1}{2}x_1 + x_2$ $S.C \begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 3 \\ -x_1 + x_2 \leqslant 1 \\ x_1 \leqslant 2 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$	$Min\ Z = 3y_1 + y_2 + 2y_3$ $S.C \begin{cases} y_1 - y_2 + y_3 \geqslant \frac{1}{2} \\ y_1 + y_2 \geqslant 1 \\ y_1, y_2, y_3 \geqslant 0 \end{cases}$
$Min\ Z = -x_1 + x_2$ $S.C \begin{cases} 2x_1 - x_2 \geqslant 2 \\ -x_1 + 2x_2 \geqslant -2 \\ x_1 + x_2 \geqslant 5 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$	$Max\ Z = 2y_1 - 2y_2 + 5y_3$ $S.C \begin{cases} 2y_1 - y_2 + y_3 \leqslant -1 \\ -y_1 + 2y_2 + y_3 \leqslant 1 \\ y_1, y_2, y_3 \geqslant 0 \end{cases}$
$Max\ Z = 2x_1 - x_2$ $S.C \begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 \leqslant 4 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$	$Min\ Z = 3y_1 + 4y_2$ $S.C \begin{cases} y_1 + y_2 \geqslant 2 \\ -y_1 \geqslant -1 \\ y_1 \in \mathbb{R}, y_2 \geqslant 0 \end{cases}$
$Max\ Z = 2x_1 - x_2$ $S.C \begin{cases} x_1 - 2x_2 \leqslant 3 \\ x_1 + x_2 = 6 \\ x_2 \leqslant 5 \\ x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$	$Min\ Z = 2y_1 + 6y_2 - 5y_3$ $S.C \begin{cases} y_1 + y_2 = 2 \\ -2y_1 + y_1 + y_2 = -1 \\ y_1 \geqslant 0, y_2 \in \mathbb{R}, y_3 \geqslant 0 \end{cases}$

4.2.3 Conditions d'optimalité primal-dual (COPD)

Cas (a) où les problèmes primal et dual possèdent chacun des solutions optimales (optimum fini).

Théorème 4.2.4 *Soient x et y des solutions réalisables respectivement du problème primal (PL) et du problème dual (PLD). Alors x et y sont des solutions réalisables optimales si et seulement si les conditions d'optimalité primal-dual (COPD) suivantes sont vérifiées :*

1) *Si une contrainte est satisfaite en tant qu'**inégalité stricte** dans (PL) (resp. (PLD)) alors la variable correspondante de (PLD) (resp. (PL)) est nulle.*
2) *Si la valeur d'une variable dans (PL) ou (PLD) est **strictement positive** alors la contrainte correspondante de l'autre programme est **une égalité**.*

4.2.4 Problème primal sous forme canonique mixte.

x et y sont deux solutions optimales pour le problème primal et le problème dual respectivement si et seulement si on a les COPD : $\begin{cases} \forall i \in I_1, \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \ ou \ y_i = 0 \\ \forall j \in J_1, \sum_{j=1}^{m} a_{ij}y_i = c_j \ ou \ x_j = 0 \end{cases}$

<u>Preuve de la condition nécessaire du Théorème des COPD.</u>

On suppose le problème primal (PL) mis sous forme canonique pure.

Soient x et y des solutions réalisables optimales de (PL) et (PLD) respectivement : $Ax \leqslant b, x \geqslant 0$ et $A^T y \geqslant b, y \geqslant 0$

Variables d'écart e et ϵ respectivement pour (PL) et (PLD) : $\begin{cases} Ax+e=b \\ x \geqslant 0, e \geqslant 0 \end{cases}$ *et* $\begin{cases} A^Ty-\epsilon=c \\ x \geqslant 0, \epsilon \geqslant 0 \end{cases}$

$\Rightarrow Z(x) = c^Tx = (A^Ty-\epsilon)^Tx = y^TAx - \epsilon^Tx$
$\Rightarrow G(x) = b^Ty = (A^Tx-e)^Ty = y^TAy - e^Ty$

Théorème de la dualité fort $\Rightarrow Z(x) = G(y) \Rightarrow \epsilon^Tx + e^Ty = 0$

Puisque $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, la relation $\epsilon^Tx + e^Ty = 0$ donne

$$\begin{cases} \epsilon_i x_i = 0 \ \forall i \\ e_j y_j = 0 \ \forall j \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Si\ \epsilon_i \neq 0\ alors\ x_i = 0 \\ Si\ x_i \neq 0\ alors\ \epsilon_i = 0 \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} Si\ e_j \neq 0\ alors\ y_j = 0 \\ Si\ y_j \neq 0\ alors\ e_j = 0 \end{cases}$$

Réciproque (condition suffisante) à partir du Théorème faible de dualité.

4.2.5 Utilisation pratique des COPD

Elles permettent de vérifier si une solution réalisable d'un (PL) est optimale ou non, à partir de la connaissance d'une solution optimale du problème dual. x^* et y^* solutions réalisables optimales de (PL) et (PLD) respectivement.

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^* < b_i \Rightarrow y_i^* = 0 \\ \sum_{j=1}^m a_{ij}y_i^* < c_j \Rightarrow x_j^* = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_i^* > 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^* = b_i \\ x_j^* > 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^m a_{ij}y_i^* = c_j \end{cases}$$

Exemple 2. Problème de production

$$(PL) \quad \begin{array}{l} Max\ Z(x_1,x_2) = 6x_1 + 4x_2 \\ S.C \begin{cases} 3x_1 + 9x_2 \leqslant 81 \\ 4x_1 + 5x_2 \leqslant 55 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 20 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \end{array} \qquad (PLD) \quad \begin{array}{l} Min\ G(y_1,y_2,y_3) = 81y_1 + 55y_2 + 20y_3 \\ S.C \begin{cases} 3y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geqslant 6 \\ 9y_1 + 5y_2 + y_3 \geqslant 4 \\ y_1 \geqslant 0, y_2 \geqslant 0, y_3 \geqslant 0 \end{cases} \end{array}$$

Solution optimale de (PL) :

$$\begin{aligned} &e_1^* = 27/2 > 0 \overset{COPD}{\Rightarrow} y_1^* = 0 \\ &x_1^* = 15/2 > 0 \overset{COPD}{\Rightarrow} 3y_1^* + 4y_2^* + 2y_3^* = 6\ (\epsilon_1^* = 0) \\ &x_2^* = 5 > 0 \overset{COPD}{\Rightarrow} 9y_1^* + 5y_2^* + y_3^* = 4\ (\epsilon_2^* = 0) \\ &e_2^* = e_3^* = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Solution optimale du problème dual $y_1^* = 0, \quad y_2^* = 1/3, \quad y_3^* = 7/3$