الفصل السابع: طرق الحل التقريبي لأنظمة المعادلات الخطية

Chapter 07: "Methods For Appreasimate Solution of Systems of linear equations"

1.7 مقدمة:

تطرقنا سابقا الى الطرق المباشرة لحل أنظمة المعادلات الخطية والتي تعطي حلول مضبوطة لكنها تأخذ حيزا كبيرا من الذاكرة عند البرمجة. في هذا الفصل نقدم نوعا جديدا من الطرق لحل أنظمة المعادلات وتسمى بالطرق التكرارية أو "الغير المباشرة" والتي تعطي حلا تقريبيا للأنظمة. هذه الطرق سهلة جدا للبرمجة، ولا تستهلك قدرا كبيرا من الذاكرة وتقدم نتائج تستطيع التحكم في دقتها.

* بصفة عامة يمكننا تحليل المصفوفة A الى الشكل التالي:

$$A = M - N \qquad (M \text{ مصفوفة عكوسة})$$

$$AX = B \Leftrightarrow (M-N)X = B \Leftrightarrow MX - NX = B \Leftrightarrow MX = B + NX$$

$$\Leftrightarrow X = M^{-1}NX + M^{-1}B \Leftrightarrow X = F(X)$$

نستعمل الآن طريقة النقطة الثابتة أي نزشاما تتقارب

$$\begin{cases} x^{(0)} & \text{نقاع البداية} \\ x^{(k+1)} = M^{-1}N\,X^{(k)} + M^{-1}\cdot B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^{(k+1)} = M^{-1}N \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^{(k)} + M^{-1}B$$

2.7 معيار التوقف

نتوقف عن عملية التكرار، اذا تحقق مايلي:

$$\text{Max}\,|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| < \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0)$$

$$1 \le i \le n$$

3.7 شروط التقارب:

قبل البداية في العمليات التكرارية يجب أن يتحقق أحد الشروط التالية و التي تسمى بشروط التقارب:

1/ $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|$ ، $i = 1, 2, \dots n$

2/ $\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| < 1$ (مجموع السطر أقل من 1)

3/ $\rho(M^{-1}N) < 1$ (ρ: le rayon Spectrale)

* بما أن التقارب متعلق بتحليل المصفوفة A. نوضح التحليلات الرئيسية المستعملة للمصفوفة A.

نكتب A على الشكل $A = D + L + U$ حيث

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

بذلك نتحصل على التحليل $A = M - N$ انطلاقا من تجميعات مختلفة للمصفوفات D و L و U.

- Jaccobi فإن $M = D$ ، $N = -(L+U)$

$$A = M - N = D - (-(L+U)) = D + L + U$$

- Gauss-Seidel فإن $M = D + L$ ، $N = -U$

$$A = M - N = D + L + U$$

4.7 طريقة Jaccobi

نلخص المعادلات التي حصلنا عليها سابقا في العبارة التالية:

$$\begin{cases} x^{(0)} & \text{شعاع البداية} \\ x^{(k+1)} = M^{-1}N\,x^{(k)} + M^{-1}B = D^{-1}(-L-U)\,x^{(k)} + D^{-1}B \end{cases}$$

ليكن نظام المعادلات الخطية التالي:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = B_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = B_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = B_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left(B_1 - a_{12}x_2^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}\right) = \cdots \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left(B_2 - a_{21}x_1^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}\right) = \frac{1}{a_{22}}\left(B_2 - \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j^{(k)}\right) \\ x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}\left(B_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j^{(k)}\right) \end{cases}$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(B_i - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)}\right)$$ أذن

5.7 طريقة Gauss-Seidel

نفس الطريقة السابقة نحصل على طريقة Gauss-Seidel.

بتعاع البداية $x^{(0)}$

$$\begin{cases} x^{(0)} \\ x^{(k+1)} = M^{-1}N\, x^{(k)} + M^{-1}B = -(D+L)^{-1}.U.X^{(k)} + (D+L)^{-1}.B \end{cases}$$

العبارة العامة:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(B_i - \sum_{j<i}^{n} a_{ij}\, x_j^{k+1} - \sum_{j>i}^{n} a_{ij}\, x_i^{k}\right), \quad i = 1, \dots, n$$

مثال 01:

احسب الأربع تكرارات الأولى بطريقة Jacobi و Gauss-Seidel

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$