Chapitre 5 : TORSION SIMPLE

I. Introduction :

II. Définition :

Une poutre est sollicitée à la torsion simple si elle est soumise à deux couples de moments opposés portés par la ligne moyenne. Une barre soumise principalement à la torsion porte le nom d'arbre

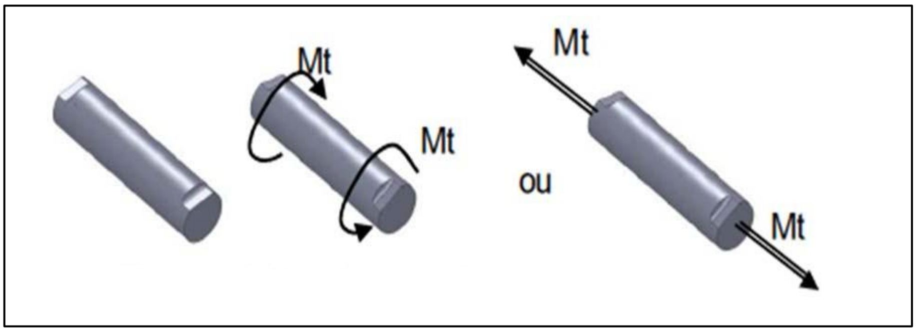

Figure.1 : Moments des actions extérieures appliqués à de la poutre.

La poutre est supposée à section circulaire constante et de poids négligé. Le torseur efforts de cohésion à la section droite (S) de centre de surface G est défini par :

$$\{\tau_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & Mt \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$$

Moment de torsion

Le moment de torsion M est la somme algébrique des moments des couples appliqués sur un coté de la section.

Moment d'inertie polaire

Pour un arbre cylindrique creux de diamètre extérieur D_e et de diamètre intérieur D_i, le moment d'inertie polaire de la section est donné par la formule suivante : $I_0=\pi/32\ (D_e^4 - D_i^4)$. Le moment d'inertie polaire d'un arbre plein s'obtient quand Di=0.

II. Essai de torsion simple :

II.1. Principe :

Une éprouvette cylindrique de révolution est encastrée à son extrémité (S1) de centre de gravité G1. On applique à l'extrémité droite sur la section (S2) de centre de gravité G2 une action mécanique modélisée en G2 par un torseur « couple » : $\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{M_{G2}} \end{pmatrix}$

En faisant croître $M_{G2}=M_{G2}.x$, on mesure les déformations de la poutre.

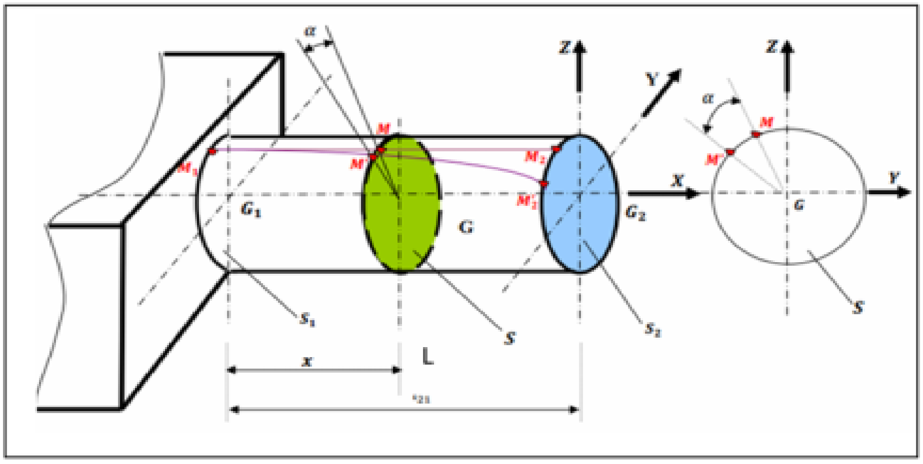

Figure.2 : Illustration de l'essai de torsion simple.

Le déplacement d'une section droite (S) est uniquement une rotation d'un angle α autour de son axe, et cette rotation est proportionnelle à sa distance x par rapport à (S1). On obtient une courbe illustrée à la Figure 3 semblable à celle de l'essai de traction :

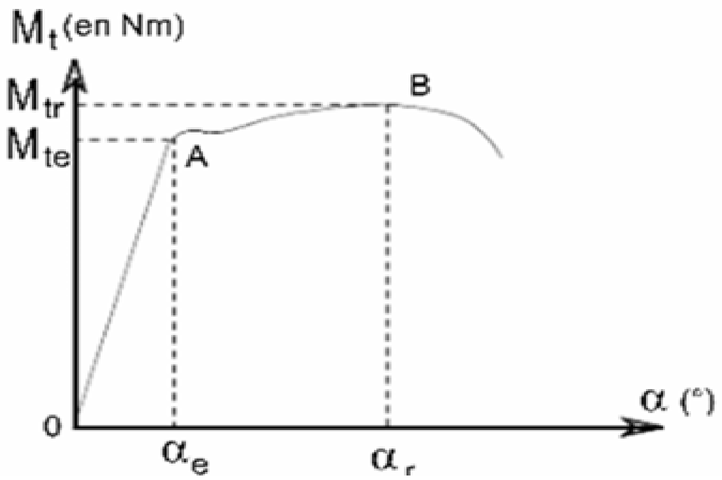

Figure.3 : courbe Mt=f(α)

Elle comprend une zone de déformations élastiques où l'angle de torsion α est proportionnel au moment de torsion. A partir du point A les déformations croissent rapidement jusqu'à avoir rupture de l'éprouvette.

Chapitre 5 : TORSION SIMPLE

III. Etude des déformations :

L'essai montre que toute section plane et normale à l'axe du cylindre reste plane et normale à l'axe et que la distance relative entre deux sections reste sensiblement constante. Toutes les fibres se déforment donc suivant une hélice, sauf la ligne moyenne qui reste droite.

$$\theta = \frac{\alpha}{x}$$

On constate que le rapport reste toujours constant. Ce rapport est appelé angle unitaire de torsion [rad /mm].

α = Angle de rotation de la section S en rad.

x = Distance séparant S à la section de référence S_0 en mm.

VI. Contrainte de cisaillement en torsion

Dans un arbre cylindrique plein ou creux soumis à un moment de torsion M , la contrainte de cisaillement en torsion τ à une distance ρ de l'axe de l'arbre est donnée par :

$$\tau = \rho / I_0 \ (Mt).$$

Mt: moment de torsion. I_0: Moment d'inertie polaire

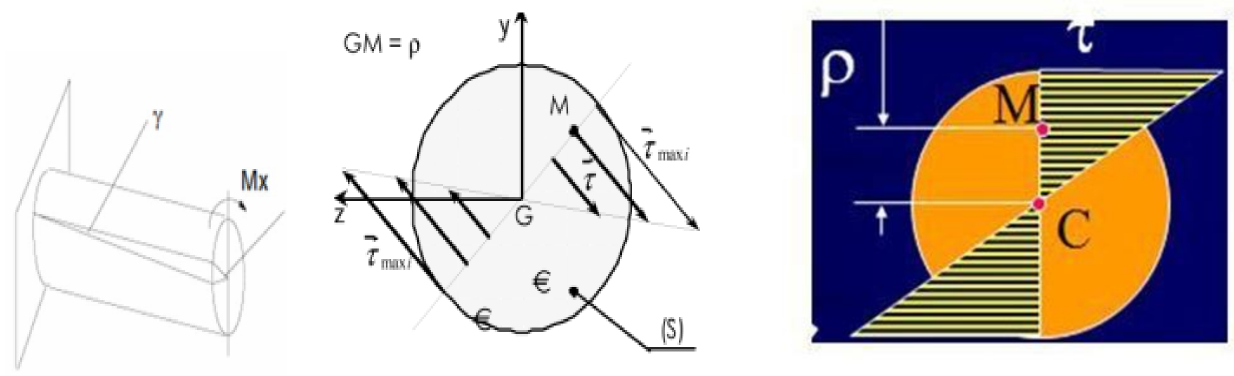

Figure.4 :Répartitions des contraintes au niveau de la section.

La loi de Hooke pour les contraintes tangentielles s'exprime donc par : $\tau = G.\gamma$ où G est le module d'élasticité transversale ou module de Coulomb. Comme l'angle γ est petit : l'arc M2 M2' = $\alpha\rho = \gamma$ x. on aura $\gamma = \frac{\alpha.\rho}{x} = \theta.\rho$

La contrainte tangentielle s'écrit : $\tau = G.\ \theta.\rho$

τ : Contrainte tangentielle de torsion (en MPa)

ρ : Distance du point M à la ligne neutre ou axe de la pièce qui ne subit aucun effort (en mm) θ : Angle unitaire (en rad/ mm)

G : Module d'élasticité transversal ou module de coulomb (en MPa)

Remarque : τ_{Max} est atteinte pour les points M périphériques de la surface du solide tels que ρ = R (Rayon)

La relation entre le moment et la déformation (équation de déformation) est: **$Mt=G\theta I_{Gz}$**

Il en découle

$$\tau_{(M)} = \frac{M_t}{I_G} r \text{ ou } \tau_{(M)} = \frac{M_t}{\frac{I_G}{r}}$$

La contrainte maximale de torsion est obtenue pour r=R : $\tau_{\max} = \frac{M_t}{I_G} R$

Mt: [N.mm]; θ [rad/mm]; G[Mpa] et IG: [mm4]

V. Condition de résistance:

La contrainte τ_{max} doit rester inférieure à la valeur de la contrainte pratique au glissement Rpg, en adoptant un coefficient de sécurité s tel que Rpg = Re/s, où s dépend de l'application.

D'où la condition de résistance d'une pièce en torsion : τ max ≤ R pg

$$\frac{M_t}{I_G} R \leq R_{pg}$$

VI.Condition de rigidité

Le calcul des dimensions des arbres de transmission ou barres de torsion se fait plus par une condition de déformation qu'une condition de résistance. En effet pour assurer une transmission rigide et éviter les vibrations, l'angle de torsion unitaire θ ne doit pas dépasser pendant le service, une valeur limite θ_{lim}. D'où la condition de rigidité d'une pièce en en torsion :

$$\frac{M_t}{GI_G} \leq \theta_{\lim}$$