Université Abdelhafid Boussouf - Mila 2024 – 2025
Institut des Mathématiques et informatique
Département des Mathématiques **Master 1 : MMTD**

Série no 2 : Introduction à la Combinatoire

Exercice 1. *On considère les entiers $n \geq 0$ et $s \geq 1$. Montrer combinatoirement que :*

1. $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

2. $$(1 + x + x^2 + \cdots + x^s)^n = \sum_{k=0}^{sn} \binom{n}{k}_s x^k.$$

Exercice 2. *Répondre aux deux questions suivantes.*

— *Donner toutes les permutations de $\{1, 2, 3\}$ et déterminer le nombre de cycles de chaque permutation. En déduire $s(3, k)$ pour $k = 1, 2, 3$.*

— *Montrer que :*

$$s(n, 1) = (n-1)! \ \text{ et } \ s(n, n) = 1$$

Exercice 3. *Répondre aux deux questions suivantes.*

1. *Montrer que :*

$$S(n, 2) = 2^{n-1} - 1.$$

en construisant toutes les partitions de $\{1, 2, 3, 4\}$ en deux blocs et en les comptant.

2. *Montrer que $f(n) = \sum_{k=1}^{n} S(n, k)$ est le nombre de partitions d'un ensemble de n éléments*

Exercice 4. *Répondre aux deux questions suivantes.*

1. *Déterminer $s(4, 1), s(4, 2), s(4, 3), s(4, 4)$.*
2. *Dresser le tableau de $s(n, k)$.*
3. *– Que signifie les deux terme*

$$s(n, k-1) \text{ et } n \times s(n, k)$$

dans la relation de recurrence

$$s(n, k) = s(n, k-1) + n \times s(n, k).$$

Solution Ex1

Interprétation Combinatoire

1. D'une part, Le terme $\binom{n}{k}$ compte le nombre total de sous-ensembles de taille k. Alors, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ compte le nombre total de sous-ensembles :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \text{nombre total de sous-ensembles.}$$

D'autre part, on sait compter le nombre total de sous-ensembles comme : Pour chaque élément a_i de $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, il y a deux choix :
— soit on l'inclut dans le sous-ensemble,
— soit on ne l'inclut pas.
Donc, il y a au total :

$$2 \times 2 \times 2 \times \times \times 2 = 2^n.$$

L'identité et donc établie.

2. On développe :

$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^s)^n = \left(\sum_{i=0}^{s} x^i\right)^n$$

Ce produit peut être vu comme la somme des monômes obtenus en choisissant un terme $x^{a_j} \in \{x^0, x^1, \ldots, x^s\}$ dans chaque facteur, et en multipliant :

$$x^{a_1} \cdot x^{a_2} \cdots x^{a_n} = x^{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$$

Soit $A = \{0, 1, 2, \ldots, s\}$. On cherche à compter, pour un entier k, le nombre de n-uplets d'entiers $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ tels que :

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = k$$

Autrement dit, le nombre de façons d'écrire k comme somme de n entiers compris entre 0 et s.
Ce nombre est exactement donné par le coefficient de x^k dans le développement de :

$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^s)^n$$

car chaque facteur de ce produit correspond au choix d'un a_i, et la multiplication encode toutes les sommes possibles.

Solution Ex2

1. Liste de toutes les permutations : Il y a $3! = 6$ permutations pour l'ensemble $\{1, 2, 3\}$. Chacune peut être écrite en notation cyclique pour compter le nombre de cycles.

Permutation (notation fonctionnelle)	Notation cyclique	Nombre de cycles
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$(1)(2)(3)$	3
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$(1)(23)$	2
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$(12)(3)$	2
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	(123)	1
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	(132)	1
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$(13)(2)$	2

2. Montrons que
$$s(n, 1) = (n - 1)!$$

Toute permutation de n éléments ayant exactement **1 cycle** est une *permutation cyclique*.

Une permutation cyclique de longueur n est une permutation dans laquelle tous les éléments sont dans un seul cycle.

Le nombre de telles permutations est égal à $(n-1)!$ car on peut fixer un élément (par exemple, 1) comme point de départ du cycle, puis organiser les $n-1$ éléments restants dans n'importe quel ordre circulaire.

$$\Rightarrow s(n, 1) = (n - 1)!$$

2. Montrons que $s(n, n) = 1$

Une permutation de n éléments ayant exactement n **cycles** est celle où chaque élément forme un cycle de longueur 1, c'est-à-dire une permutation *identité*.

Il n'y a qu'une seule telle permutation : $(1)(2)\cdots(n)$.

$$\Rightarrow s(n, n) = 1$$

Solution Ex3

1. Montrer que $S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$

Les partitions en deux blocs de $\{1, 2, 3, 4\}$ sont les suivantes :
— $\{\{1\}, \{2, 3, 4\}\}$, $\{\{2\}, \{1, 3, 4\}\}$, $\{\{3\}, \{1, 2, 4\}\}$
— $\{\{4\}, \{1, 2, 3\}\}$, $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$, $\{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$
— $\{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$, $\{\{2, 3\}, \{1, 4\}\}$, $\{\{2, 4\}, \{1, 3\}\}$
— $\{\{3, 4\}, \{1, 2\}\}$, $\{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}$, $\{\{1, 2, 4\}, \{3\}\}$
— $\{\{1, 3, 4\}, \{2\}\}$, $\{\{2, 3, 4\}, \{1\}\}$
On trouve bien $S(4, 2) = 2^3 - 1 = 7$.

Généralisation : Si on fixe un élément (disons 1), les $n-1$ autres éléments peuvent soit aller dans le même bloc que 1, soit dans un autre bloc (le second). Le nombre total de choix est donc 2^{n-1}, mais on enlève 1 car on ne veut pas de cas où tous les éléments sont dans le même bloc.

$$S(n,2) = 2^{n-1} - 1$$

2. Montrer que $f(n) = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)$ est le nombre de partitions d'un ensemble de n éléments

Par définition, $S(n,k)$ est le nombre de partitions d'un ensemble de n éléments en k blocs. Donc la somme $\sum_{k=1}^{n} S(n,k)$ compte le nombre total de partitions de n éléments, toutes tailles de blocs confondues. Ce nombre est appelé le **nombre de Bell** B_n :

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} S(n,k) = B_n$$