1.1 اختبارات الفرضيات حول الفرق بين متوسطي مجتمعين

يمكن التمييز بين حالتين:

1.2.3 اختبارات الفرضيات حول الفرق بين متوسطي مجتمعين مستقلتين

يمكن التمييز بين حالتين:

1.1.1.1 التوزيعات الطبيعية المستقلة المعلومة التباين

لدينا إحصاءة الاختبار هي:

$$Z = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

وعندما نعتبر H_0 صحيحة تكون قيمة الإحصاءة هي:

$$Z_0 = \frac{(\overline{X} - \overline{Y})}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

وحسب مستوى المعنوية α نجري الاختبار حسب الحالات التالية:

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

أو $H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$

أو $H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$

مثال:

أخذت عينة حجمها 22 ومتوسطها 83 من المجتمع $N(\mu_1, 110)$ وأخذت عينة أخرى مستقلة عن الأولى حجمها 27 ومتوسطها 69 من المجتمع $N(\mu_2, 81)$.

المطلوب: اختبار الفرضية $_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ مقابل الفرضية $H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$ عند مستوى المعنوية 0.05.

الحل:

لدينا إحصاءة الاختبار هي:

$$Z = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \backsim N(0,1)$$

وعندما نعتبر H_0 صحيحة تكون قيمة الإحصاءة هي:

$$Z_0 = \frac{(83 - 69) - 0}{\sqrt{\frac{110}{22} + \frac{81}{27}}} = 4.95$$

عند مستوى المعنوية 0.05 وبما أن فرضية العدم ذات طرف فإن القيمة الجدولية تحسب كما يلي:

$$\alpha = 0.05 \Longrightarrow Z_{1-\alpha} = Z_{0.95} = 1.645$$

نلاحظ أن القيمة المحسوبة $_0$ تقع في منطقة رفض H_0 ومنه نرفض H_0 ونقبل H_1 عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$.

2.1.1.1 التوزيعات الطبيعية المستقلة المجهولة التباين

يمكن التمييز بين حالتين:

- **حالة العينات الكبيرة:**

لدينا إحصاءة الاختبار هي:

$$Z = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \backsim N(0,1)$$

وحسب مستوى المعنوية α نجري الاختبار حسب الحالات التالية:

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$
$$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

أو $H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$

أو $\quad H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$

- **حالة العينات الصغيرة:**

لدينا إحصاءة الاختبار هي:

$$T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_P\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$$

حيث:

$$S_P^2 = \frac{S_1^2(n_1-1)+S_2^2(n_2-1)}{n_1+n_2-2}$$

وحسب مستوى المعنوية α نجري الاختبار حسب الحالات التالية:

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$
$$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

أو $\quad H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$

أو $\quad H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$

مثال:

اختيرت عينة عشوائية مكونة من 11 طالبا من كلية الاقتصاد فوجد أن متوسط ذكائهم 80 درجة بانحراف معياري 7 درجات، واختيرت عينة عشوائية من 6 طلاب من كلية الآداب فوجد أن متوسط ذكائهم 75 درجة بانحراف معياري 5 درجات، هل يمكننا القول بأن متوسط ذكاء طلبة الاقتصاد لا يساوي متوسط ذكاء طلبة كلية الآداب وذلك عند مستوى المعنوية 0.05؟

الحل:

ليكن المتغير العشوائي X_i يمثل ذكاء الطالب من كلية الاقتصاد.

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1)$$

ليكن المتغير العشوائي i يمثل يمثل ذكاء الطالب من كلية الآداب.

$$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2)$$

نريد اختبار الفرضيات التالية:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

σ_1^2 و σ_2^2 مجهولان و $n_1, n_2 < 30$ ومنه إحصاءة الاختبار هي:

$$T = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_P\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \backsim t_{n_1+n_2-2}$$

وعندما نعتبر صحيحة H_0 تكون قيمة الإحصاءة هي:

$$T_0 = \frac{(80 - 75)}{\sqrt{41}\left(\sqrt{\frac{1}{11} + \frac{1}{6}}\right)} = 1.54$$

عند مستوى المعنوية 0.05 وبما أن فرضية العدم ذات الطرفين فإن القيمة الجدولية تحسب كما يلي:

$$\alpha = 0.05 \Longrightarrow t_{1-\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2} = t_{0,975,15} = 2.131$$

نلاحظ أن القيمة المحسوبة Z_0 تقع في منطقة قبول H_0 ومنه نقبل H_0 ويمكن القول بأن متوسط ذكاء طلبة الاقتصاد يساوي متوسط ذكاء طلبة كلية الآداب وذلك عند مستوى المعنوية 0.05.

2.2.3 اختبارات الفرضيات حول الفرق بين متوسطي مجتمعين غير مستقلتين

إذا كنا نرغب في اختبار تساوي وسطي مجتمعين مرتبطين فإننا نقوم بصياغة الفرضيات التالية:

$$H_0: \mu_d = 0$$
$$H_1: \mu_d \neq 0$$

أو $H_1: \mu_d > 0$

أو $H_1: \mu_d < 0$

أما بالنسبة لإحصاءة الاختبار فيمكن التمييز بين حالتين:

- إذا كان حجم العينة $n \geq 30$ فإن إحصاءة الاختبار هي:

$$Z = \frac{\overline{D} - \mu_D}{\frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}} \backsim N(0,1)$$

- إذا كان حجم العينة $n < 30$ فإن إحصاءة الاختبار هي:

$$T = \frac{\overline{D} - \mu_D}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} \backsim t_{n-1}$$

وتكون قاعدة اتخاذ القرار إذا كانت الفرضية البديلة ذات الطرفين على الشكل التالي:

$$\begin{cases} T_0 \epsilon \left[-t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}, t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}\right] & \Rightarrow \quad H_0 \text{ قبول الفرضية} \\ T_0 \notin \left[-t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}, t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}\right] & \Rightarrow \quad H_0 \text{رفض الفرضية} \end{cases}$$

أما إذا كانت الفرضية البديلة ذات الطرف فتكون قاعدة اتخاذ القرار على الشكل التالي:

$$\begin{cases} |\overline{D}| \leq t_{\ 1-\alpha} \frac{\sigma_D}{\sqrt{n}} \Rightarrow & H_0 \text{ قبول الفرضية} \\ |\overline{D}| > t_{\ 1-\alpha} \frac{\sigma_D}{\sqrt{n}} \Rightarrow & H_0 \text{رفض الفرضية} \end{cases}$$

مثال:

يعطي الجدول التالي قياس ضغط الدم قبل وبعد تناول دواء معين لخمسة أشخاص:

قبل الدواء x_i	172	180	172	176	170
بعد الدواء y_i	168	174	173	178	157

المطلوب: اختبار الفرضيات التالية عند مستوى المعنوية 0.05 :

$$H_0: \mu_d = 0$$
$$H_1: \mu_d \neq 0$$

الحل:

قبل الدواء x_i	172	180	172	176	170
بعد الدواء y_i	168	174	173	178	157
	4	6	−1	−2	13

$$\overline{D} = 4$$
$$S_D = 6.04$$

لدينا حجم العينة $n < 30$ ومنه إحصاءة الاختبار هي:

$$T = \frac{\overline{D} - \mu_D}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} \backsim t_{n-1}$$

وعندما نعتبر صحيحة H_0 تكون قيمة الإحصاءة هي:

$$T_0 = \frac{4}{6.04/\sqrt{5}} = 1.48$$

عند مستوى المعنوية 0.05 وبما أن فرضية العدم ذات طرفين فإن القيمة الجدولية تحسب كما يلي:

$$\alpha = 0.05 \Longrightarrow t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} = t_{0,975,4} = 2.776$$

نلاحظ أن القيمة المحسوبة ${}_0$ تقع في منطقة قبول H_0 ومنه نقبل H_0 عند مستوى المعنوية 0.05.