الإجابة النموذجية لتمرين السلسلة الثانية حول الانحدار الخطي المتعدد

1. حساب مقدرات المعاملات بطريقة المربعات الصغرى:

لدينا:

$$y_t = a_0 + a_1x_{1t} + a_2x_{2t} + \cdots + a_kx_{kt} + \varepsilon_t$$

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a} = (X'X)^{-1} \; X'Y$$

$$(X'X) = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_{1i} & \sum_{i=1}^{n} x_{2i} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{1i} & \sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 & \sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{2i} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{2i} & \sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{2i} & \sum_{i=1}^{n} x_{2i}^2 \end{pmatrix} ; X'Y = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_{1i}y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_{2i}y_i \end{pmatrix}$$

✓ نقوم بحساب كل عناصر المصفوفتين من خلال الجدول الموالي:

I	Y_i	X_{1i}	X_{2i}	X_{1i}^2	X_{2i}^2	$X_{1i}X_{2i}$	$X_{1i}Y_i$	$X_{2i}Y_i$
1	10	5	22	25	484	110	50	220
2	11	8	19	64	361	152	88	209
3	09	4	17	16	289	68	36	153
4	07	2	24	4	576	48	14	168
5	13	8	22	64	484	176	104	286
6	15	7	20	49	400	140	105	300
7	12	7	19	49	361	133	84	228
8	10	5	18	25	324	90	50	180
9	6	5	25	25	625	125	30	150
10	14	11	23	121	529	253	154	322
∑	**107**	**62**	**209**	**442**	**4433**	**1295**	**715**	**2216**

$$(X'X) = \begin{pmatrix} 10 & 62 & 209 \\ 62 & 442 & 1295 \\ 209 & 1295 & 4433 \end{pmatrix} ; X'Y \begin{pmatrix} 107 \\ 715 \\ 2216 \end{pmatrix}$$

لحساب وتحديد معكوس المصفوفة $(X'X)^{-1}$ لابد من:

أ) حساب المحدد:

$$det(XX') = +10\begin{pmatrix}442 & 1295\\1295 & 4433\end{pmatrix} - 62\begin{pmatrix}62 & 1295\\209 & 4433\end{pmatrix} + 209\begin{pmatrix}62 & 442\\209 & 1295\end{pmatrix}$$

$det(XX')$=10[(442x4433) −(1295x1295)] −62[(62x4433) −(1295x209)] +209[(62x1295) −(442x209)]

$$det(XX') = 2823610 - 259842 - 2526392$$

$$\boldsymbol{det(XX') = 37376}$$

ب) استخراج مرافق المرصوفة:

$$\mathbf{Co}\ (\boldsymbol{X'X}) = \begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\A_{12} & A_{22} & A_{32}\\A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{Aij = (-1)^{i+j} detMij}$$

Aij ويسمى بالعامل المرافق، فيها يكتب بدلالة **محدد** المصفوفة الناتجة عن إلغاء السطر j والعمود i في المصفوفة (XX') .

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{pmatrix}442 & 1295\\1295 & 4433\end{pmatrix} = +282361$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{pmatrix}62 & 1295\\209 & 4433\end{pmatrix} = -4191$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{pmatrix}62 & 442\\209 & 1295\end{pmatrix} = -12088$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{pmatrix}62 & 209\\1295 & 4433\end{pmatrix} = -4191$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{pmatrix}10 & 209\\209 & 4433\end{pmatrix} = +649$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{pmatrix}10 & 62\\209 & 1295\end{pmatrix} = +8$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{pmatrix}62 & 209\\442 & 1295\end{pmatrix} = -12088$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{pmatrix}10 & 209\\62 & 1295\end{pmatrix} = +8$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{pmatrix}10 & 62\\62 & 442\end{pmatrix} = +576$$

$$\mathrm{Co}\ (X'X) = \begin{pmatrix}+282361 & -4191 & -12088\\-4191 & +649 & +8\\-12088 & +8 & +576\end{pmatrix}$$

ج) استخراج معكوس المصفوفة:

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{det(XX')} \text{Co}\,(X'X)$$

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{37376}\begin{pmatrix} +282361 & -4191 & -12088 \\ -4191 & +649 & +8 \\ -12088 & +8 & +576 \end{pmatrix}$$

د) حساب مقدرات المعاملات

$$\hat{a} = (X'X)^{-1}XY'$$

$$\hat{a} = \frac{1}{37376}\begin{pmatrix} +282361 & -4191 & -12088 \\ -4191 & +649 & +8 \\ -12088 & +8 & +576 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 107 \\ 715 \\ 2216 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11{,}4794 \\ 0{,}8916 \\ -0{,}3018 \end{pmatrix}$$

ومنه النموذج المقدر:

$$\widehat{Y_t} = 11{,}4794 + 0{,}8916\,X_{1t} - 0{,}3018\;X_{2t}$$

التفسير:

من خلال المعادلة نلاحظ أن:

- المتغير Y له علاقة طردية مع X_1, حيث كلما ارتفع X_1 ب 10% سيؤدي ذلك إلى ارتفاع Y ب 8,916 %.
- وجود علاقة عكسية بين Y وX_2, حيث كلما ارتفع X_2ب 10% أدى إلى انخفاض Y ب 3.018%.

2- اختبار جودة النموذج المقدر من خلال جدول تحليل التباين مع حساب معامل التحديد

- **تشكيل جدول تحليل التباين(جدولANOVA)**

مصدر التغيير	مجموع مربعات الانحرافات	عدد درجة الحرية	متوسط مربعات الإنحرافات
المتغيرات المستقلةx	SCE= $\sum_{t=1}^{n}(\widetilde{Y}_t - \overline{Y})^2 = 52.1306$	K=2	SCE/k= 52.1306/2= 26.0653
البواقي	SCR= $\sum_{t=1}^{n} e_t^2 = 23.9641$	n-k-1=7	SCE/n-k-1= 3.7236
المجموع	SCT= $\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \overline{Y})^2 = 76.1$	n-1=9	/

من خلال الجدول نلاحظ أن مجموع مربعات الانحراف المتغيرات المستقلة (SCE= 52.1306)أكبر من مجموع مربعات انحرافات البواقي (SCR=23.9641) أي أن القدرة التفسيرية مرتفعة ومنه النموذج جيد.

i	Y_i	$\widehat{Y_t}$	e_i	e_i^2	$Y_t - \overline{Y}$	$(Y_t - \overline{Y})^2$	$\widehat{Y}_i - \overline{Y}$	$(\widetilde{Y}_i - \overline{Y})^2$
1	10	9.2978	0.7022	0.4930	-0.7	0.49	-1.4022	1.9661
2	11	12.878	-1.878	3.5268	0.3	0.09	2.178	4.7436
3	09	9.9152	-0.9152	0.8375	-1.7	2.89	-0.7848	0.6159
4	07	6.0194	0.9806	0.9615	-3.7	13.69	-4.6806	21.9080
5	13	11.9726	1.0274	1.0555	2.3	5.29	1.2726	1.6195
6	15	11.6846	3.3154	10.9918	4.3	18.49	0.9846	0.9694
7	12	10.505	0.0136	0.0001	1.3	1.69	1.2864	1.6548
8	10	8.3924	-0.505	0.2550	-0.7	0.49	-0.195	0.0380
9	6	14.3456	-2.3924	5.7235	-4.7	22.09	-2.3076	5.3250
10	14		-0.3456	0.1194	3.3	10.89	3.6456	13.2903
Σ	107			23.9641		76.1		52.1306

حساب معامل التحديد R^2 :

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}{\sum_{t=1}^{n} (Y_t - \bar{Y})^2}$$

$$R^2 = 1 - \frac{23.9641}{76.1}$$

$$R^2 = 1 - 0.3149$$

$$R^2 = 0.6851$$

$$R^2 = 68.51\%$$

2 التنبؤ بقيمة i=11 علما أن : $X_{1,11} = 10$ ، $X_{2,11} = 19$

$$\widehat{Y_t} = 11,4794 + 0,8916\, X_{1t} - 0,3018\, X_{2t}$$

$$\hat{Y}_{11} = 11.4794 + 0.8916(10) - 0.3018(19)$$

$$\hat{Y}_{11} = 14.6612$$

د عبد الحق لفيلف