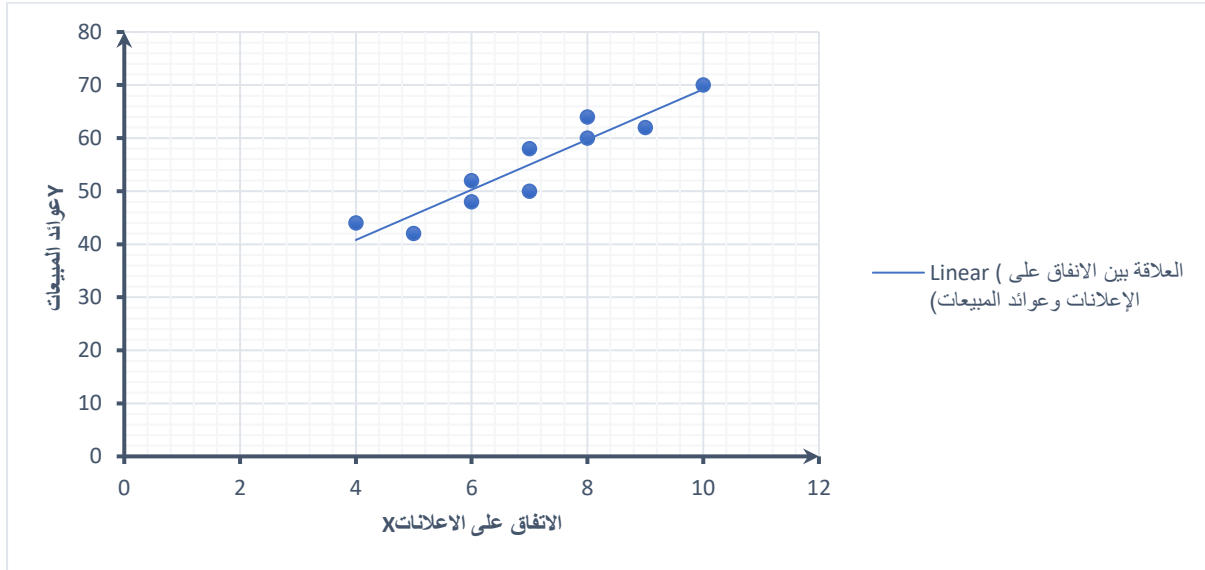


الإجابة النموذجية للسلسلة الأولى حول الانحدار الخطي البسيط

التمرين الأول:

1. التمثيل البياني لبيانات الجدول التالي بسحابة النقاط:

السنة	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
الإعلانات	4	5	6	6	7	8	7	9	8	10
المبيعات	44	42	52	48	50	60	588	62	64	70



• تفسير البيانات:

من خلال سحابة النقاط نلاحظ أن العلاقة بين الإنفاق على الإعلانات وعوائد مبيعات الشركة هي علاقة خطية أي أنه يمكننا التعبير عنها بخط انحدار يمر بين مختلف الثنائيات المشكلة من قيم الإعلانات وقيم عوائد المبيعات. ومن جهة أخرى نجد أن هذه العلاقة طردية بحكم أن زيادة الإنفاق على الإعلانات تؤدي إلى زيادة عوائد أرباح هذه الشركة وسنتأكد من خلال إشارة معامل الانحدار الذي سنقوم بحسابه لاحقاً.

2. تقدير النموذج الخطي البسيط الذي يقيس أثر الإنفاق على الإعلانات وعوائد المبيعات وتفسير النتائج:

*تقدير النموذج الخطي البسيط الذي يقيس أثر الإنفاق على الإعلانات وعوائد المبيعات.

• تقدير المعلمة β^2 :

Annee	X	Y	(X- $\bar{X}$)	(Y- $\bar{Y}$)	(X- $\bar{X}$) (Y- $\bar{Y}$)	(X- $\bar{X}$) ²	$\hat{Y}$	Er
2009	4	44	-3	-11	33	9	40.81	3.19
2010	5	42	-2	-13	26	4	45.54	-3.54
2011	6	52	-1	-3	3	1	50.27	1.73
2012	6	48	-1	-7	7	1	50.27	-2.27
2013	7	50	0	-5	0	0	55.00	-5.00
2014	8	60	1	5	5	1	59.73	0.27
2015	7	58	0	3	0	0	55.00	3.00

2016	9	62	2	7	14	4	64.47	-2.46
2017	8	64	1	9	9	1	59.73	4.27
2018	10	70	3	15	45	9	69.19	0.81
Σ	7	550	0	0	142	30	550.00	0.00

$$\hat{\beta} = \frac{\sum(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}{\sum(X - \bar{X})^2} \hat{\beta} = \frac{142}{30} \hat{\beta} = 4.73$$

• تقدير المعلمة α

$$\hat{\alpha} = Y - \hat{\beta}\bar{X} = 55 - 4.73(7) \hat{\alpha} = 21.89$$

• النموذج المقدر:

$$\hat{Y}_t = 21.86 + 4.73X_t$$

* مثال تقدير عوائد المبيعات لسنة 2009

$$\hat{Y}_1 = 21.86 + 4.73(4) \hat{Y}_1 = 40.89$$

* تفسير المعلمات:

- تشير المعلمة $\hat{\alpha} = 21.89$ إلى وجود مقدار ثابت من عوائد المبيعات بمبلغ 21,89 مليون دينار جزائري لا يتأثر بتغير الإنفاق على الإعلانات (المتغير المستقل)، أي أنه عندما يساوي الإنفاق على الإعلان الصفر تحقق الشركة عائدا بمقدار 21,89 مليون دينار جزائري.
- تشير المعلمة $\hat{\beta} = 4.73$ إلى وجود علاقة طردية بين الإنفاق على الإعلانات وعوائد الإنتاج من جهة وأن كل تغير في الإنفاق على الاعلانات (x) بوحدة واحدة يؤدي إلى تغير عوائد المبيعات في نفس الاتجاه بـ 4.73 وحدة.

استنتاج مجموع مربعات البواقي $\sum e_t^2$

e_t^2	$(Y - \bar{Y})^2$	$(\hat{Y} - \bar{Y})$	$(\hat{Y} - \bar{Y})^2$
10.23	121	-14.2	201.64
12.48	169	-9.47	89.68
2.99	9	-4.73	22.37
5.11	49	-4.73	22.37
25	25	0	0
0.27	25	4.73	22.37
9	9	0	0
6.5	49	9.47	89.68
18.23	81	4.74	22.37
0.65	225	14.2	201.64
89.81	762	0	672.12

$$\sum e_t^2 = 89.81$$

3. تقدير تباين المتغير العشوائي:

$$\delta^2 \varepsilon_t = \frac{\sum e_t^2}{n-2} \Rightarrow \delta^2 \varepsilon_t = \frac{89.81}{10-2} \Rightarrow \delta^2 \varepsilon_t = 11.23$$

4. التباين المقدر للمقدرات:

• تباين $\hat{\alpha}$

$$v(\hat{\alpha}) = \delta^2 \varepsilon_t \left[\frac{x^2}{\sum x^2} + \frac{1}{n} \right] \Rightarrow v(\hat{\alpha}) = 11,23 \left[\frac{7^2}{30} + \frac{1}{10} \right] \Rightarrow v(\hat{\alpha}) = 19.47$$

• تباين β

$$v(\hat{\beta}) = \delta^2 \varepsilon_t \left[\frac{1}{\sum x^2} \right] \Rightarrow v(\hat{\beta}) = 11.23 \left(\frac{1}{30} \right) v(\hat{\beta}) = 0.374$$

ملاحظة : حيث $\sum x^2$ هي $(\sum x - x^-)^2$

5. إيجاد معامل التحديد R^2 :

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = \frac{\sum (\hat{Y} - Y)^2}{\sum (Y - Y)^2} \hat{Y} \Rightarrow R^2 = \frac{672,12}{762} = 0,8820 \quad R^2 = 88,20\%$$

R^2 حساب بطريقة ثانية :

$$R^2 = 1 - \frac{\sum e^2}{\sum (Y - Y)^2} = 1 - \frac{89.81}{762} = 0,8820 \quad R^2 = 88,20\%$$

*تشكيل جدول ANOVA:

متوسط المربعات	درجة الحرية	مجموع المربعات	مصدر التغير
$\sum (Y - \bar{Y})^2 / 1 = 672.12 / 1 = 672.12$	1	ESS=672.12	المتغير المستقل
$\sum e^2 / n-2 = 89.88 / 8 = 11.23$	n-2=10-2=8	RSS=89.81	البواقي
/	n-1=10-1=9	TSS=762	المجموع

• ESS مجموع مربعات الانحرافات المفسرة $\sum (\hat{Y} - \bar{Y})^2$

• RSS مجموع مربعات البواقي $\sum e^2$

• TSS مجموع الانحرافات الكلية $\sum (Y - \bar{Y})^2$

6- اختبار ستودنت عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$

• بالنسبة ل β :

$$\begin{cases} H_0: \beta = 0 \\ H_1: \beta \neq 0 \end{cases}$$

$$\beta = 0$$

$$St_{cal} = \left| \frac{\hat{\beta} - \beta}{\sqrt{\delta^2 \beta}} \right| \quad St_{cal} = \left| \frac{\hat{\beta} - 0}{\sqrt{\delta^2 \beta}} \right|$$

$$St_{cal} = \left| \frac{\hat{\beta}}{\sqrt{\delta^2 \beta}} \right| \sim St_{tab}^{\alpha/2}_{(n-2)}$$

*نقوم بمقارنة الاحصاءة المجدولة لستودنت عند مستوى معنوية $\frac{\alpha}{2}$ وعند درجة حرية $n-2$ مع الاحصاءة المحسوبة.

$$St_{tab}^{\alpha/2}_{(n-2)} = 2.306$$

$$St_{cal} = \left| \frac{\hat{\beta}}{\sqrt{\delta^2 \beta}} \right| \quad St_{cal} = \left| \frac{4.73 - 0}{\sqrt{0.374}} \right|$$

$$St_{cal} = \left| \frac{4.73}{0.6119} \right| \quad St_{cal} = 7.74$$

$St_{tab} > St_{cal}$ نرفض الفرضية H_0 ومنه $0 \neq \beta$ وبالتالي وجود علاقة ذات دلالة إحصائية بين المتغير المستقل (الاتفاق على الإعلانات) وعوائد المبيعات (المتغير التابع).

بالنسبة ل α :

$$\begin{cases} H_0: \alpha = 0 \\ H_1: \alpha \neq 0 \end{cases}$$

$$\alpha = 0$$

$$St_{cal} = \left| \frac{\hat{\alpha} - \alpha}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 \hat{\alpha}}} \right| \quad St_{cal} = \left| \frac{\hat{\alpha} - 0}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 \hat{\alpha}}} \right|$$

$$St_{cal} = \left| \frac{\hat{\alpha}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 \hat{\alpha}}} \right| \sim St_{tab}^{\alpha/2}_{(n-2)}$$

$$St_{tab}^{\alpha/2}_{(n-2)} = 2.306$$

$$St_{cal} = \left| \frac{\hat{\alpha}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 \hat{\alpha}}} \right| \quad St_{cal} = \left| \frac{21.86}{\sqrt{19.47}} \right|$$

$$St_{cal} = \left| \frac{21.86}{4.41} \right| \quad St_{cal} = 4.96$$

نرفض الفرضية H_0 ومنه $\alpha \neq 0$ وبالتالي وجود الحد الثابت له دلالة إحصائية في النموذج.

7- اختبار فيشر:

$$\begin{cases} H_0: \alpha = \beta = 0 \\ H_1: \alpha \neq 0 \vee \beta \neq 0 \end{cases}$$

$$F_{cal} = \frac{\frac{R^2}{2-1} \frac{0.882}{2-1}}{\frac{1-R^2}{n-2} \frac{1-0.882}{10-2}} \frac{0.882}{0.01475}$$

$$F_{cal} = 59.79 \quad F_{tab}^{\alpha=5\%}_{(1, n-2)} = 3.32$$

$f_{tab} > f_{cal}$ نرفض الفرضية H_0 ومنه $\alpha \neq 0$ و $\beta \neq 0$ وبالتالي وجود الحد الثابت والمتغير المستقل لهما دلالة إحصائية في النموذج.

إيجاد عائد المبيعات عند تخصيص اتفاق على الإعلانات بمقدار 12 مليون دينار جزائري لسنة 2019

$$\hat{Y}_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta} \cdot X_t$$

$$\hat{Y}_t = 21.86 + 4.73X_t$$

$$t=10+1 \quad X_{10+1}=12$$

$$\hat{Y}_{10+1} = 21.86 + 4.73(12) \quad \hat{Y}_{10+1} = 78.62$$

عائد المبيعات المتوقع لسنة 2019 هو **78.62** مليون دينار جزائري.

د . عبد الحق لفيلف