<u>Exercice 1 :</u> (

Un candidat préparant un concours de doctorat au centre universitaire de Mila peut traverser trois états de motivation : **Haute (H)**, **Moyenne (M)** et **Basse (B)**. Chaque jour, son état de motivation évolue selon les probabilités suivantes :

- Si aujourd'hui il est en **Haute motivation (H)** :
  - Il reste en H avec une probabilité de 0.6
  - Il passe à M avec une probabilité de 0.3
  - Il passe à B avec une probabilité de 0.1
- Si aujourd'hui il est en **Moyenne motivation (M)** :
  - Il passe à H avec une probabilité de 0.3
  - Il reste en M avec une probabilité de 0.4
  - Il passe à B avec une probabilité de 0.3
- Si aujourd'hui il est en **Basse motivation (B)** :
  - Il passe à H avec une probabilité de 0.1
  - Il passe à M avec une probabilité de 0.4
  - Il reste en B avec une probabilité de 0.5

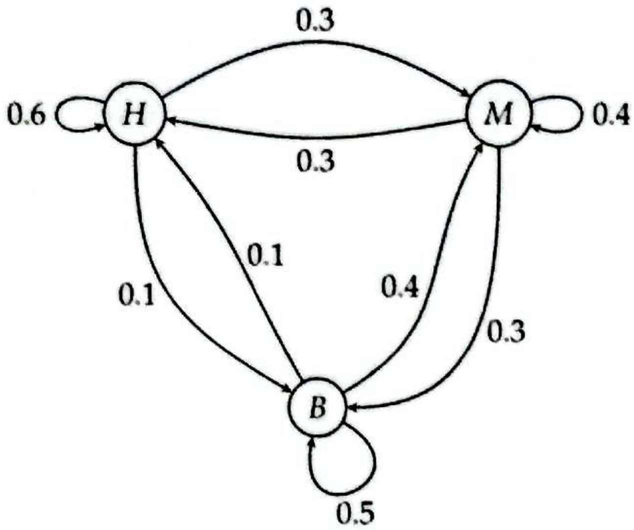
1. Construire la matrice de transition associée à cette chaine de Markov.
2. Tracer le graphe de transition correspondant.
3. Si un candidat est en état H aujourd'hui, quelle est la probabilité qu'il soit en état B après deux jours ?
4. Déterminer la distribution des probabilités des états à long terme de cette chaîne de Markov (la distribution stationnaire).

Exercice 1 : (Solution

1. **Construire la matrice de transition associée à cette chaîne de Markov.** La matrice de transition est donnée par :

$$P = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{bmatrix}$$

2. **Graphe de transition**



3. **Si l'étudiant est en état H aujourd'hui, quelle est la probabilité qu'il soit en état B après deux jours ?**

La probabilité d'être en état B après deux jours en partant de H est donnée par l'élément (1,3) de la matrice P^2. Calculons P^2 :

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0.46 & 0.34 & 0.20 \\ 0.33 & 0.37 & 0.30 \\ 0.23 & 0.39 & 0.38 \end{bmatrix}$$

Ainsi, la probabilité $P(H \to B)$ après deux jours est 0.20.

4. **Déterminer la distribution des probabilités des états à long terme de cette chaîne de Markov (la distribution stationnaire).**

La distribution stationnaire $\pi = (\pi_H, \pi_M, \pi_B)$ satisfait :

$$\pi P = \pi$$

Cela donne le système d'équations :

$$\pi_H = 0.6\pi_H + 0.3\pi_M + 0.1\pi_B$$

$$\pi_M = 0.3\pi_H + 0.4\pi_M + 0.3\pi_B$$

$$\pi_B = 0.1\pi_H + 0.4\pi_M + 0.5\pi_B$$

Avec la contrainte :

$$\pi_H + \pi_M + \pi_B = 1$$

La solution de ce système est :

$$\pi = (0.333, 0.333, 0.333)$$

Cela signifie qu'à long terme, les probabilités d'être en état de motivation Haute, Moyenne ou Basse sont égales à $\frac{1}{3}$.

Exercice 2:

On considère la chaine de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ de trois phases possibles $\{1,2,3\}$ et de matrice de transition P donnée par :

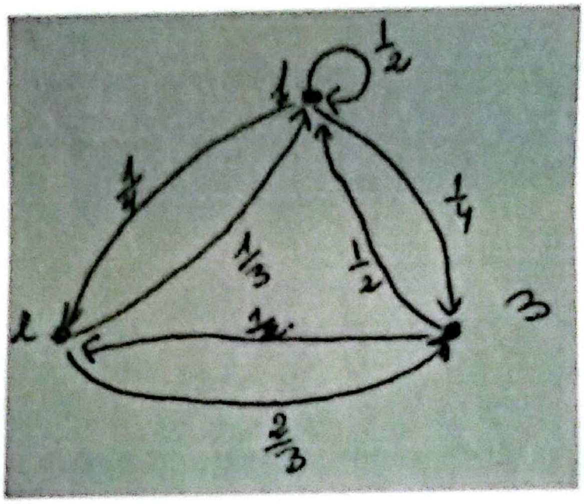
$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \alpha \\ \frac{1}{3} & \beta & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

1. Trouver les valeurs α, β, γ puis tracer le graphe de transition.
2. La chaine est-elle irréductible ?
3. Si on connait $\mathbb{P}(X_0 = 1) = \frac{1}{2}$, chercher $\mathbb{P}(X_0 = 1, X_1 = 2)$.
4. Si on connait $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X_1 = 2) = \frac{1}{4}$, chercher$\mathbb{P}(X_1 = 3, X_2 = 2, X_3 = 1)$.
5. Si on connait $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{2}$, calculer $\mathbb{P}(X_5 = 2|X_4 = 1)$, $\mathbb{P}(X_3 = 2|X_0 = 1), \mathbb{P}(X_1 = 1|X_2 = 1, X_3 = 3)$.

Exercice 2: soln

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \alpha \\ \frac{1}{3} & \beta & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

1- On trouve les valeurs α, β, γ puis on trace le graphe de transition. On a P est une matrice de transition, alors $\alpha = \frac{1}{4}, \beta = 0, \gamma = \frac{1}{2}$.



2- La chaîne est-elle irréductible ?
La chaîne est irréductible puisque tous les états communiquent entre eux.

3- On connait $\mathbb{P}(X_0 = 1) = \frac{1}{2}$, et on cherche $\mathbb{P}(X_0 = 1, X_1 = 2)$.
$\mathbb{P}(X_0 = 1, X_1 = 2) = \mathbb{P}(X_0 = 1).\mathbb{P}(X_1 = 2|X_0 = 1) = \frac{1}{8}$.

4- On connait $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X_1 = 2) = \frac{1}{4}$, et on cherche $\mathbb{P}(X_1 = 3, X_2 = 2, X_3 = 1)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 = 3, X_2 = 2, X_3 = 1) &= \mathbb{P}(X_1 = 3).\mathbb{P}(X_2 = 2|X_1 = 3).\mathbb{P}(X_3 = 1|X_1 = 3, X_2 = 2) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = 3).\mathbb{P}(X_2 = 2|X_1 = 3).\mathbb{P}(X_3 = 1|X_2 = 2), \end{aligned}$$

et on a $\mathbb{P}(X_1 = 3) = 1 - \mathbb{P}(X_1 = 1) - \mathbb{P}(X_1 = 2) = \frac{1}{4}$, donc

$$\mathbb{P}(X_1 = 3, X_2 = 2, X_3 = 1) = \frac{1}{4}.\frac{1}{2}.\frac{1}{3} = \frac{1}{24}.$$

5- On connait $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{2}$ calcule $\mathbb{P}(X_5 = 2|X_4 = 1), \mathbb{P}(X_5 = 2|X_0 = 1), \mathbb{P}(X_1 = 1|X_2 = 1, X_3 = 3)$. On a $\mathbb{P}(X_5 = 2|X_4 = 1) = \frac{1}{4}$.

$$\mathbb{P}(X_3 = 2|X_0 = 1) = (\tfrac{1}{4})^3 = \tfrac{1}{64}.$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 = 1|X_2 = 1, X_3 = 3) &= \frac{\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 3)}{\mathbb{P}(X_2 = 1, X_3 = 3)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X_2 = 1|X_1 = 1)\mathbb{P}(X_3 = 3|X_1 = 1, X_2 = 1)}{\mathbb{P}(X_2 = 1, X_3 = 3)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X_2 = 1|X_1 = 1)\mathbb{P}(X_3 = 3|X_2 = 1)}{\mathbb{P}(X_2 = 1)\mathbb{P}(X_3 = 3|X_2 = 1)} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$