

Remarque: une série temporelle ou série chronologique est une suite de valeurs numériques représentant l'évolution d'une quantité

spécifique au cours du temps et l'ensemble $T = \mathbb{Z}$

Def: processus stochastiques stationnaires au sens strict

La stationnarité forte: Soit un processus stochastique $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est dit strictement ou fortement stationnaire si:

$\forall$ le n. de temps $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, $t_i \in \mathbb{Z}$, $h \in \mathbb{Z}$ $t_i + h \in \mathbb{Z}$ la suite:

$(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \dots, X_{t_n+h})$ la même loi que: $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$

Stationnarité faible:

Def: un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est dit stationnaire de second ordre ou au sens faible si:

1) $E(X_t^2) < +\infty, \forall t \in \mathbb{Z}$ (borné)

2) $E(X_t)_{t \in \mathbb{Z}} = m$ (indépendant)

3) $\forall (t, h) \in \mathbb{Z}$: $\gamma(h) = \text{cov}(X_{t+h}, X_t)$

$= E((X_t - m)(X_{t+h} - m)) = \text{indépendante}$

Le processus Bruit blanc:

Def: un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un bruit blanc si il satisfait les conditions suivantes:

1. $\forall t \in \mathbb{Z}, E(X_t) = 0$

2. $\gamma(h) = E(X_t \cdot X_{t+h}) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } h=0 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$

Remarque: Si $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ sont i.i.d et $\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_t) = 0$ alors: (ε_t) est un bruit blanc.

Ex p: Soit $X_t = Z \cos(\theta t) + y \sin(\theta t)$ Z, y deux v.a non corrélées

$\text{Var}(y) = \text{Var}(Z) = 1$ $\theta \in [-\pi, \pi]$

montrer que (X_t) est stationnaire au sens faible (2nd ordre).

$$E\{X_t^2\} = E\{(Z \cos(\theta t) + y \sin(\theta t))^2\}$$

$$= E\{Z^2 \cos^2(\theta t) + y^2 \sin^2(\theta t) + 2Zy \cos(\theta t) \sin(\theta t)\}$$

$$= E\{Z^2 \cos^2(\theta t)\} + E\{y^2 \sin^2(\theta t)\} + 2E\{Zy \cos \sin\}$$

$$= \cos^2(\theta t) E\{Z^2\} + \sin^2(\theta t) E\{y^2\}$$

$$= \cos^2(\theta t) \text{Var}(Z) + \sin^2(\theta t) \text{Var}(y)$$

$$= 1 < +\infty$$

$$E\{X_t\} = E\{Z \cos(\theta t) + y \sin(\theta t)\}$$

$$= E\{Z \cos(\theta t)\} + E\{y \sin(\theta t)\}$$

$$= \cos(\theta t) E\{Z\} + \sin(\theta t) E\{y\}$$

$$= 0$$

$$\text{cov}(X_{t+h}, X_t) = E\{X_{t+h} \cdot X_t\}$$

$$= E\{(Z \cos(\theta(t+h)) + y \sin(\theta(t+h))) (Z \cos(\theta t) + y \sin(\theta t))\}$$

$$= E\{Z^2 \cos(\theta t) \cos(\theta(t+h)) + y^2 \sin(\theta t) \sin(\theta(t+h)) + 2Zy \cos(\theta t) \sin(\theta(t+h))\}$$

$$= E\{Z^2 \cos(\theta t) \cos(\theta(t+h))\} + E\{y^2 \sin(\theta t) \sin(\theta(t+h))\}$$

$$+ E\{2Zy \cos(\theta t) \sin(\theta(t+h))\}$$

$$= \cos(\theta t) \cos(\theta(t+h)) E\{Z^2\} + \sin(\theta t) \sin(\theta(t+h)) E\{y^2\}$$

$$= \cos(\theta t) \cos(\theta(t+h)) + \sin(\theta t) \sin(\theta(t+h))$$

$$= \cos(\theta h) \sin(\theta h) \text{ Donc il est stationnaire}$$

Ex P 2: Soit $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un bruit blanc d'espérance = 0 et $\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$ i.i.d.
Soit $X_t = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$

montrer que X_t est stationnaire au sens faible

$$\begin{aligned} E\{X_t^2\} &= E\{(\varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1})^2\} \\ &= E\{\varepsilon_t^2 + \theta^2 \varepsilon_{t-1}^2 + 2\theta \varepsilon_t \varepsilon_{t-1}\} \\ &= E\{\varepsilon_t^2\} + \theta^2 E\{\varepsilon_{t-1}^2\} + 2\theta E\{\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}\} \\ &= \sigma^2 + \theta^2 \sigma^2 = \sigma^2(1 + \theta^2) < +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\{X_t\} &= E\{\varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}\} = E\{\varepsilon_t\} + \theta E\{\varepsilon_{t-1}\} \\ &= 0 \text{ indépendant de } t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\{X_t \cdot X_{t+h}\} &= E\{(\varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t+h} + \theta \varepsilon_{t+h-1})\} \\ &= E\{\varepsilon_t \varepsilon_{t+h}\} + \theta E\{\varepsilon_t \varepsilon_{t+h-1}\} + \theta E\{\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t+h}\} \\ &\quad + \theta^2 E\{\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t+h-1}\} \quad (1) \end{aligned}$$

$$h=0 \Rightarrow (1) = \sigma^2 + \theta^2 \sigma^2$$

$$h=1 \Rightarrow (1) = 0 \cdot \sigma^2$$

$$h=-1 \Rightarrow (1) = 0 \cdot \sigma^2$$

Si non (1) = 0

$$E\{X_t \cdot X_{t+h}\} = \gamma(h) = \begin{cases} \sigma^2(1 + \theta^2) & \text{si } h=0 \\ \sigma^2 \cdot 0 & \text{si } h=\pm 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\gamma(h)$ ind. t

Martingales:

Def $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, P)$ un espace de probabilité filtré un processus $(M_n)_{n \geq 0}$ est dit une Martingale S. Si:

1. $(X_n)_{n \geq 0}$ est $\mathcal{F}_n$ -mesurable (ind. adapté)
2. $\forall n \in \mathbb{N}: E(|M_n|) < +\infty$
3. $E(M_{n+1} / \mathcal{F}_n) = M_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ p.p.s

Def on dit que $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous Martingale S. Si:

- 1) et 2) sont satisfait d'.
 - 3) $E(M_{n+1} / \mathcal{F}_n) \geq M_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ p.p.s
- sur martingale:

- 1) et 2) sont satisfait
- 3) $E(M_{n+1} / \mathcal{F}_n) \leq M_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ p.p.s

On dit que (M_n) est $\mathcal{F}_n$ -martingale resp $\mathcal{F}_n$ -sous MG, $\mathcal{F}_n$ -sur MG

ex: Soit (y_i) suite de v.a. i.i.d $\mathcal{F}_i$
 $E(y_i) = m$ et $X_n = \prod_{i=1}^n \frac{y_i}{m}$

montrer que: (X_n) est $\mathcal{F}_n$ -martingale
1. $\mathcal{F}_n = \sigma(y_0, y_1, \dots, y_n)$

Sol:

- 1) X_n est mesurable com produit fini des mesurables (y_i) .
- 2) X_n est intégrable comme produit fini des intégrables.

$$\begin{aligned} 3) E\{X_{n+1} / \mathcal{F}_n\} &= X_n \\ &= E\left(\prod_{i=1}^{n+1} \frac{y_i}{m} / \mathcal{F}_n\right) = E\left(X_n \cdot \frac{y_{n+1}}{m} / \mathcal{F}_n\right) \\ &= X_n \cdot E\left(\frac{y_{n+1}}{m} / \mathcal{F}_n\right) \\ &= \frac{X_n}{m} \cdot E(y_{n+1}) \\ &= \frac{X_n}{m} \cdot m \\ &= X_n \end{aligned}$$

... sont les séries hyper

Ex p: Soit (y_i) suite de v.a. i.i.d

$$k-1 \quad E(y_i) = 0 \text{ et } X_n = \sum_{i=1}^n y_i$$

montrer que (X_n) est F_n -martingale

$$k-1 \quad F_n = \sigma(y_0, y_1, \dots, y_n)$$

Sol:

1) X_n est mesurable comme somme finie des mesurables (y_i)

2) X_n est intégrable comme somme finie des intégrables

$$3) E(X_{n+1} / F_n) = E\left(\sum_{i=1}^{n+1} y_i / F_n\right)$$

$$= E(X_n + y_{n+1} / F_n)$$

$$= E(y_{n+1} / F_n) + X_n$$

$$= X_n + E(y_{n+1})$$

$$= X_n$$

Ex p: Donner une condition sur y_i k-1

$$X_n = \sum_{i=1}^n y_i \text{ i.i.d soit une martingale}$$

par rapport à $\sigma(y_0, \dots, y_n)$

$$E(X_{n+1} / F_n) = X_n + E(y_{n+1}) = X_n$$

Remarque: Si $(X_n)_{n \geq 0}$ est une surmartingale alors $(-X_n)_{n \geq 0}$ est une sous MG

X_n est une MG, φ une fonction convexe

$$E(X_{n+1} / F_n) = X_n$$

$$\varphi(E(X_{n+1} / F_n)) \leq \varphi(X_n)$$

Jensen

$$\Rightarrow E(\varphi(X_{n+1}) / F_n) \leq \varphi(X_n)$$

$$Y_n = \varphi(X_n) \Rightarrow Y_n \text{ est une sur MG}$$

Décomposition de Doob:

Déf: on appelle processus Croissant

$$(Y_t)_{t \in \mathbb{N}} \text{ si pour } \forall t: Y_{t+1} \geq Y_t \text{ p.p.}$$

2) on appelle processus prévisible si Y_{t+1} est F_t -mesurable.

Théorème Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ une sous

Martingale pour la filtration $(F_t)_{t \in \mathbb{N}}$

alors la décomposition suivante est unique

et elle s'appelle décomposition de Doob.

$$X_t = M_t + Y_t \text{ où } (M_t)_{t \in \mathbb{N}} \text{ est un}$$

F_t -MG et $(Y_t)_{t \in \mathbb{N}}$ est un processus

prévisible et croissant.

$$E(Y_{t+1} / F_t) \geq X_t$$

$$E(X_{t+1} / F_t) = X_t + Y_t \geq Y_t$$

$$Y_{t+1} = Y_t + E(X_{t+1} - X_t / F_t) \text{ sachet } y_0 = 0$$

1) $(Y_t)_{t \in \mathbb{N}}$ est prévisible Y_{n+1} est F_n -mesurable

$$Y_{t+1} = Y_t + E(X_{t+1} - X_t / F_t)$$

$$Y_1 = \underbrace{y_0}_{\text{mesurable}} + \underbrace{E(X_1 - X_0 / F_0)}_{\text{mesurable}}$$

Y_{t+1} est mesurable par récurrence

Donc il est prévisible.

2) croissance $Y_{t+1} \geq Y_t$

$$Y_{t+1} - Y_t = E(X_{t+1} - X_t / F_t) \geq 0$$

Car $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ une sous MG

2) $(M_t)_{t \in \mathbb{N}}$ est une MG

$$M_t = X_t - Y_t$$

$$E(M_{t+1} | \mathcal{F}_t) = E(X_{t+1} - Y_{t+1} | \mathcal{F}_t)$$

$$= E(X_{t+1} | \mathcal{F}_t) - E(Y_{t+1} | \mathcal{F}_t)$$

$$= E(X_t - Y_t | \mathcal{F}_t) = X_t - Y_t = M_t$$

est une MG

2) l'unicité : supposons qu'il existe

2 décompositions $X_t = M_t + Y_t$, $y_0 = 0$

$$X_t = M'_t + Y'_t \quad y'_0 = 0$$

$$X_t - X_t = 0 \Rightarrow M_t - M'_t = Y_t - Y'_t$$

$$\Rightarrow M_1 - M'_1 = Y_1 - Y'_1$$

$\vdots$

$$M_0 - M'_0 = 0$$

On a $M_t = M'_t$, $\forall t$, et $Y_t = Y'_t$, $\forall t$

par récurrence donc la décomposition est unique

Temps d'arrêt :

τ d'arrêt : Supposons que je possède de un actif financier