Cours de la matière : Théorie des graphes
Pour les étudiants de la troisième année Licence Mathématiques Appliquée
Département de mathématiques
Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf, Mila
Anné universitaire 2024/2025

Chapitre 5, Flots

Table des matières

Introduction

La recherche opérationnelle regroupe un ensemble de méthodes visant à optimiser la prise de décision dans des situations complexes. Elle permet de modéliser des problèmes issus du monde réel, d'identifier les approches de résolution les plus adaptées et d'exploiter les outils pertinents pour proposer des solutions efficaces. En tant que discipline appartenant à l'aide à la décision, elle fournit aux décideurs des techniques leur permettant d'opter pour les meilleures stratégies possibles. Comme toute théorie en constante évolution, la recherche opérationnelle ne cesse d'étendre son champ d'application à divers domaines. Certains problèmes de décision impliquent la prise en compte de plusieurs objectifs, nécessitant ainsi une analyse multicritère afin de sélectionner la solution la plus appropriée.

Parmi les outils fondamentaux de la recherche opérationnelle, la théorie des graphes joue un rôle central. En représentant des ensembles d'objets et leurs relations sous forme de graphes, elle permet d'aborder des problèmes d'optimisation majeurs tels que la recherche de chemins optimaux, l'ordonnancement des tâches, ainsi que l'étude des concepts de couverture et de domination dans les réseaux. Cette branche des mathématiques trouve des applications variées, notamment en logistique, en informatique, en télécommunications et dans le domaine des transports.

L'histoire de la théorie des graphes remonte au XVIII siècle avec les travaux de Leonhard Euler, notamment son célèbre problème des ponts de Königsberg : les habitants de la ville cherchaient à déterminer s'il était possible de traverser tous les ponts sans passer deux fois par le même et revenir au point de départ. D'autres problèmes historiques, tels que la marche du cavalier sur l'échiquier ou le coloriage des cartes, ont également contribué à l'émergence de cette discipline.

Depuis son origine, la théorie des graphes a connu un développement considérable et s'est étendue à diverses disciplines telles que la chimie, la biologie et les sciences sociales. Dès le début du XX siècle, elle s'est imposée comme une branche à part entière des mathématiques, notamment grâce aux contributions de Konig, Menger, Cayley, Berge et Erdos.

De manière générale, un graphe permet de modéliser la structure et les connexions d'un système complexe en mettant en évidence les relations entre ses éléments. Il constitue un outil puissant pour représenter des réseaux de communication, des réseaux sociaux, des infrastructures routières, des interactions entre espèces en biologie, ou encore des circuits électriques. Aujourd'hui, la théorie des graphes demeure un domaine de recherche actif, mobilisant aussi bien des mathématiciens que des spécialistes de l'algorithmique, en raison de son importance dans la résolution de problèmes combinatoires et computationnels.

1

Problèmes de Flots dans les Réseaux

1.1 Position du problème et généralités

1.1.1 Introduction

De nombreux problèmes réels (transport, télécommunications, circulation, réseaux de distribution) peuvent être modélisés par des **réseaux de flots**. Un **réseau** est un graphe orienté dont les arcs ont une capacité maximale de transport.

Définition 1.1 (Réseau de flot) *Un **réseau de flot** est un triplet* $(G = (V, E), s, t, c)$ *:*

— *G est un graphe orienté ;*

— *s est une **source** (point d'entrée du flot) ;*

— *t est un **puits** (point de sortie du flot) ;*

— *$c : E \to \mathbb{R}^+$ est une fonction capacité sur les arcs.*

1.1.2 Définition d'un flot

Définition 1.2 (Flot) *Un **flot** est une fonction $f : E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant :*

1. ***Capacité** : pour tout $(u, v) \in E$, $0 \leq f(u, v) \leq c(u, v)$;*

2. ***Conservation du flot*** *: pour tout $v \in V \setminus \{s,t\}$,*

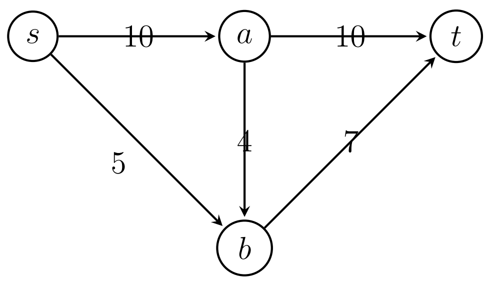
$$\sum_{u:(u,v)\in E} f(u,v) = \sum_{w:(v,w)\in E} f(v,w).$$

*La **valeur du flot** est :*

$$|f| = \sum_{v:(s,v)\in E} f(s,v).$$

1.1.3 Exemple simple

Considérons le réseau suivant :



Les capacités sont indiquées sur les arcs. Objectif : envoyer le maximum de flot de s à t.

—

1.2 Problème de Coupe Minimale

1.2.1 Définition

Définition 1.3 (Coupe) *Une **coupe** (S,T) est une partition de V en deux ensembles S et T tels que $s \in S$, $t \in T$.*

*La **capacité de la coupe** est :*

$$c(S,T) = \sum_{u\in S, v\in T} c(u,v).$$

1.2.2 Exemple de coupe

Dans le graphe précédent, une coupe possible est :

$$S = \{s, a\}, \quad T = \{b, t\}.$$

La capacité est :

$$c(S, T) = c(s, b) + c(a, b) + c(a, t) = 5 + 4 + 10 = 19.$$

—

1.3 Algorithme de Ford-Fulkerson

1.3.1 Principe général

Ford-Fulkerson est un algorithme itératif :

— Chercher un **chemin augmentant** dans le graphe résiduel ;
— Pousser le flot maximal possible sur ce chemin ;
— Répéter jusqu'à absence de chemin augmentant.

1.3.2 Graphe résiduel

Définition 1.4 (Graphe résiduel) *Pour un flot donné f, le graphe résiduel G_f est défini par :*

— *Chaque arc (u, v) a une capacité résiduelle $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$;*
— *Les arcs inverses (v, u) sont ajoutés avec capacité $f(u, v)$ (permettant de réduire le flot si nécessaire).*

1.3.3 Pseudocode

Algorithm 1 Ford-Fulkerson

Initialiser $f(u,v) = 0$ pour tout (u,v)
while il existe un chemin augmentant P de s à t **do**
  calculer $c_f(P) = \min\{c_f(u,v) : (u,v) \in P\}$
  for chaque (u,v) dans P **do**
    $f(u,v) \leftarrow f(u,v) + c_f(P)$
    $f(v,u) \leftarrow f(v,u) - c_f(P)$
  end for
end while
return f

1.3.4 Exemple complet de Ford-Fulkerson

Initialisation : $f = 0$ partout.

1er chemin augmentant $s \to a \to t$:

$$c(s,a) = 10, \quad c(a,t) = 10 \quad \Rightarrow \quad \min = 10.$$

On envoie 10 unités sur ce chemin.

Mise à jour du flot :

$$f(s,a) = 10, \quad f(a,t) = 10.$$

Graphe résiduel :

Capacités restantes : - (s,a) : 0 - (s,b) : 5 - (a,b) : 4 - (b,t) : 7

2ème chemin augmentant $s \to b \to t$:

$$c(s,b) = 5, \quad c(b,t) = 7 \quad \Rightarrow \quad \min = 5.$$

On envoie 5 unités.

Mise à jour :

$$f(s,b) = 5, \quad f(b,t) = 5.$$

Pas d'autres chemins augmentants possibles.

Flot total :

$$|f| = 10 + 5 = 15.$$

—

1.4 Dualité entre flot maximum et coupe minimale

1.4.1 Énoncé du théorème

Théorème 1.1 (Flot maximum et coupe minimale) *La valeur du flot maximum est égale à la capacité de la coupe minimale.*

1.4.2 Démonstration (idée)

- Si un flot maximum existe, il n'existe plus de chemin augmentant. - On peut alors partitionner V en deux ensembles S et T : - S : sommets atteignables depuis s dans le graphe résiduel ; - T : autres sommets. - Les arcs de S vers T sont saturés : capacité utilisée à 100%.

Donc :

$$|f| = c(S, T).$$

—

1.5 Remarques complémentaires

— Si toutes les capacités sont entières, Ford-Fulkerson termine en un nombre fini d'itérations.
— **Algorithme d'Edmonds-Karp** : version améliorée qui utilise BFS pour trouver les chemins augmentants les plus courts (en nombre d'arcs).
— **Applications** : réseaux électriques, télécommunications, gestion de trafic, etc.