الفصل السادس: "طرق الحل المباشر لأنظمة المعادلات الخطية" "Methods for direct resolution of systems of linear equations"

1. مقدمة:

في هذا الفصل سوف نتطرق إلى نوعين من الطرق لحل أنظمة المعادلات الخطية وهما (الطرق المباشرة و الطرق التكرارية) لمصفوفة مربعة.

- بصفة عامة نظام المعادلات الخطية هو مجموعة من المعادلات تملك نفس عدد المجاهيل و يمكن كتابته بالشكل التالي:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

حيث $x_1, x_2, \ldots, x_n$ مجاهيل

هذا النظام يمكن كتابته أيضا على الشكل المصفوفي: $AX=B$

حيث A هي مصفوفة من الحجم $(n\times n)$ ، X و B عبارة عن أشعة (أعمدة) من الحجم (n).

- عدة طرق يمكن اعتمادها لحل هذا النظام $(AX=B)$ نذكر منها:

* الطريقة الكلاسيكية (كرامر)
* الطرق المباشرة "direct methods"
* الطرق التكرارية "Iterative methods"

2. طريقة كرامر

تعتبر طريقة كرامر من أشهر الطرق التي تستعمل لحل أنظمة المعادلات الخطية والتي تعتمد في ذلك على المحددات

اذا كان : - $\det A = |A| \neq 0$ $\Leftarrow$ النظام يقبل حل وحيد

حيث : $x_i = \dfrac{\det A_i}{\det A}$ و A_i هي مصفوفة نحصل عليها

باستبدال i^{eme} عمود في المصفوفة A ب B .

* لكن مشكلة هذه الطريقة أنها تحتاج الكثير من العمليات الحسابية . على سبيل المثال اذا كان $n=18$ فإن طريقة كرامر تحتاج 3×18^8 عملية للحصول على X المتدرجة . لذلك سوف نتطرق الى طرق أخرى تحتاج أقل عدد من العمليات الحسابية في هذا الفصل .

3. الطرق المباشرة

نقول عن طريقة ما، انها مباشرة اذا قدمت حلا مضبوطا في النهاية بعد القيام بعدد محدود من العمليات ، وهي تستعمل غالبا في الحالات التي تكون فيها $n \leq 100$

3.1 طريقة غوص البسيطة "Ordinary Gauss method"

تعتمد هذه الطريقة على تحويل النظام الخطي $AX = B$ الى نظام آخر مكافئ ، $A^{(n)}X = B^{(n)}$ حيث $A^{(n)}$ هي مصفوفة مثلثية عليا .

$$\begin{cases} a_{11}^{(n)} x_1 + a_{12}^{(n)} x_2 + \cdots + a_{1n}^{(n)} x_n = b_1^{(n)} \\ 0 + a_{22}^{(n)} x_2 + \cdots + a_{2n}^{(n)} x_n = b_2^{(n)} \\ 0 + 0 + \cdots + a_{3n}^{(n)} x_n = b_3^{(n)} \\ \vdots \\ 0 + 0 + \cdots + 0 + a_{nn}^{(n)} x_n = b_n^{(n)} \end{cases}$$

ثم نقوم بحل النظام الجديد بالبدء بالمعادلة الأخيرة $a_{nn}x_n = b_n$ ثم باقي المعادلات .

3.2 طريقة غوص - جوردن "Gauss-Jordan method"

هذه الطريقة تعتمد على تحويل المصفوفة A في النظام $AX = B$

الى مصفوفة احادية (Identy) كما يلي :

$$[A, B] \xrightarrow{\text{تحويل}} [I, B'] \Rightarrow \left(Ax = B \rightarrow IX = B' \rightarrow X = B' \right)$$

- وتستعمل هذه الطريقة أيضا للحصول على المصفوفة العكسية للمصفوفة A (The inverse matrix)

أمثلة:

1. ليكن النظام الخطي التالي :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 11 \end{cases}$$

- حل هذا النظام بإستعمال طريقتي كرامر و غوص البسيطة

2. اوجد حل النظام التالي بإستعمال طريقة Gauss-Jordan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

الحل :

"LU decomposition"

3.3 طريقة التحليل إلى LU

لنفرض أن النظام $AX = B$ يملك حلا وحيدا و A هي مصفوفة مربعة. مبدأ هذه الطريقة هو تحليل المصفوفة A إلى $L.U$ حيث: U هي مصفوفة مثلثية عليا و L هي مصفوفة مثلثية سفلى. لتسهيل حل النظام بهذه الطريقة نقسمها في خطوتين بسيطتين

$$L.y = B \quad (1) \qquad \text{و} \qquad U.X = y \quad (2)$$

- المصفوفة U يمكن الحصول عليها بطريقة غوص $(A^{(n)}X = B^{(n)})$ حيث $A^{(n)} = U$. أما L فتكتب كما يلي:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} , \quad \alpha_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$$

- اذا كان $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ يمكن تطبيق طريقة غوص اذا يمكن أيضا تحليل A الى الشكل LU.

مثال 2: حل النظام التالي بطريقة التحليل الى LU:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} , \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}$$

4.3 تحليل شوليسكي "Sholesky decomposition"

نظرية

اذا كان A مصفوفة متناظرة معرفة أنها موجبة. فإنه توجد مصفوفة مثلثية سفلى L . حيث: $A = L \cdot L^T$

بالإضافة على ذلك، اذا فرضنا في L أن تكون كل معاملات القطر موجبة فإن التحليل المصفوفة A يكون وحيدا.

تذكير:

* نقول عن A أنها مصفوفة متناظرة اذا كان: $A = A^T$
* نقول عن مصفوفة A ذات البعد $(n \times n)$ انها معرفة موجبة، اذا كانت المحددات (عددها n) للمصفوفات الجزئية الرئيسية كلها موجبة تماما.

"Positive-definite-matrix"

$$\det_1 > 0,\quad \det_2 > 0,\quad \det_3 > 0 \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

مثال 03: ليكن النظام التالي:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

* حل المصفوفة A بطريقة "Sholesky" ثم حل النظام $AX=B$.