

2.3. اختبارات الفرضيات حول الفرق بين متوسطي مجتمعين

1.2.3. اختبارات الفرضيات حول الفرق بين متوسطي مجتمعين مستقلين

يمكن التمييز بين حالتين:

التوزيعات الطبيعية المستقلة المجهولة التباين

حالة العينات الصغيرة

نجري الاختبار حسب الحالات التالية:

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0 \quad \text{أو}$$

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0 \quad \text{أو}$$

لدينا إحصاء الاختبار هي:

$$T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_P \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$$

وعندما نعتبر صحيحة H_0 تكون قيمة الإحصاء هي:

$$T_0 = \frac{(\bar{X} - \bar{Y})}{S_P \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

حالة العينات الكبيرة

نجري الاختبار حسب الحالات التالية:

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0 \quad \text{أو}$$

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0 \quad \text{أو}$$

لدينا إحصاء الاختبار هي:

$$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

وعندما نعتبر صحيحة H_0 تكون قيمة الإحصاء هي:

$$Z_0 = \frac{(\bar{X} - \bar{Y})}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

التوزيعات الطبيعية المستقلة المعروفة التباين

نجري الاختبار حسب الحالات التالية:

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0 \quad \text{أو}$$

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0 \quad \text{أو}$$

لدينا إحصاء الاختبار هي:

$$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

وعندما نعتبر صحيحة H_0 تكون قيمة الإحصاء هي:

$$Z_0 = \frac{(\bar{X} - \bar{Y})}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

وتكون قاعدة اتخاذ القرار إذا كانت الفرضية

البديلة ذات الطرفين على الشكل التالي:

$$\begin{cases} T_0 \in \left[-t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}, t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}\right] \Rightarrow \text{قبول الفرضية } H_0 \\ T_0 \notin \left[-t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}, t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}\right] \Rightarrow \text{رفض الفرضية } H_0 \end{cases}$$

أما إذا كانت الفرضية البديلة ذات الطرف

فتكون قاعدة اتخاذ القرار على الشكل التالي:

$$\begin{cases} |(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)| \leq t_{1-\alpha} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \Rightarrow \\ |(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)| > t_{1-\alpha} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \Rightarrow \end{cases}$$

وتكون قاعدة اتخاذ القرار إذا كانت الفرضية

البديلة ذات الطرفين على الشكل التالي:

$$\begin{cases} Z_0 \in \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}, Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \Rightarrow \text{قبول الفرضية } H_0 \\ Z_0 \notin \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}, Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \Rightarrow \text{رفض الفرضية } H_0 \end{cases}$$

أما إذا كانت الفرضية البديلة ذات الطرف فتكون

قاعدة اتخاذ القرار على الشكل التالي:

$$\begin{cases} |(\bar{X} - \bar{Y})| \leq Z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \Rightarrow \text{قبول الفرضية } H_0 \\ |(\bar{X} - \bar{Y})| > Z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \Rightarrow \text{رفض الفرضية } H_0 \end{cases}$$

وتكون قاعدة اتخاذ القرار إذا كانت الفرضية البديلة

ذات الطرفين على الشكل التالي:

$$\begin{cases} Z_0 \in \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}, Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \Rightarrow \text{قبول الفرضية } H_0 \\ Z_0 \notin \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}, Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \Rightarrow \text{رفض الفرضية } H_0 \end{cases}$$

أما إذا كانت الفرضية البديلة ذات الطرف فتكون

قاعدة اتخاذ القرار على الشكل التالي:

$$\begin{cases} |(\bar{X} - \bar{Y})| \leq Z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \Rightarrow \text{قبول الفرضية } H_0 \\ |(\bar{X} - \bar{Y})| > Z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \Rightarrow \text{رفض الفرضية } H_0 \end{cases}$$

أمثلة:

المثال الثاني:	المثال الأول:
<p>اختيرت عينة عشوائية مكونة من 11 طالبا من كلية الاقتصاد فوجد أن متوسط ذكائهم 80 درجة بانحراف معياري 7 درجات، واختيرت عينة عشوائية من 6 طلاب من كلية الآداب فوجد أن متوسط ذكائهم 75 درجة بانحراف معياري 5 درجات، هل يمكننا القول بأن متوسط ذكاء طلبة الاقتصاد لا يساوي متوسط ذكاء طلبة كلية الآداب وذلك عند مستوى المعنوية 0.05؟</p>	<p>أخذت عينة حجمها 22 ومتوسطها 83 من المجتمع $N(\mu_1, 110)$ وأخذت عينة أخرى مستقلة عن الأولى حجمها 27 ومتوسطها 69 من المجتمع $N(\mu_2, 81)$. المطلوب: اختبار الفرضية $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ مقابل الفرضية $H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$ عند مستوى المعنوية 0.05.</p>
<p>نريد اختبار الفرضيات التالية:</p> $H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ <p>عندما نعتبر صحيحة H_0 تكون قيمة الإحصاء هي:</p> $T_0 = \frac{(80 - 75)}{\sqrt{41} \left(\sqrt{\frac{1}{11} + \frac{1}{6}} \right)} = 1.54$ <p>عند مستوى المعنوية 0.05 وبما أن فرضية العدم ذات الطرفين فإن القيمة الجدولية تحسب كما يلي:</p> $\alpha = 0.05 \Rightarrow t_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2} = t_{0.975, 15} = 2.131$ <p>نلاحظ أن القيمة المحسوبة Z_0 تقع في منطقة قبول H_0 ومنه نقبل H_0 ويمكن القول بأن متوسط ذكاء طلبة الاقتصاد يساوي متوسط ذكاء طلبة كلية الآداب وذلك عند مستوى المعنوية 0.05.</p>	<p>لدينا إحصاء الاختبار هي:</p> $Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$ <p>وعندما نعتبر صحيحة H_0 تكون قيمة الإحصاء هي:</p> $Z_0 = \frac{(83 - 69) - 0}{\sqrt{\frac{110}{22} + \frac{81}{27}}} = 4.95$ <p>عند مستوى المعنوية 0.05 وبما أن فرضية العدم ذات طرف فإن القيمة الجدولية تحسب كما يلي:</p> $\alpha = 0.05 \Rightarrow Z_{1-\alpha} = Z_{0.95} = 1.645$ <p>نلاحظ أن القيمة المحسوبة Z_0 تقع في منطقة رفض H_0 ومنه نرفض H_0 ونقبل H_1 عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$.</p>

2.2.3. اختبارات الفرضيات حول الفرق بين متوسطي مجتمعين غير مستقلين

مجتمعين غير مستقلين

إذا كان حجم العينة $n < 30$

إذا كنا نرغب في اختبار تساوي وسطي مجتمعين مرتبطين فإننا نقوم بصياغة الفرضيات التالية:

$$\begin{aligned} H_0: \mu_d &= 0 \\ H_1: \mu_d &\neq 0 \\ H_1: \mu_d &> 0 \quad \text{أو} \\ H_1: \mu_d &< 0 \quad \text{أو} \end{aligned}$$

إحصاء الاختبار هي:

$$T = \frac{\bar{D} - \mu_D}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

وتكون قاعدة اتخاذ القرار إذا كانت الفرضية البديلة ذات الطرفين على الشكل التالي:

$$\begin{cases} T_0 \in \left[-t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}, t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \right] \Rightarrow \text{قبول الفرضية } H_0 \\ T_0 \notin \left[-t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}, t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \right] \Rightarrow \text{رفض الفرضية } H_0 \end{cases}$$

أما إذا كانت الفرضية البديلة ذات الطرف فتكون قاعدة اتخاذ القرار على الشكل التالي:

$$\begin{cases} |\bar{D}| \leq t_{1-\alpha} \frac{\sigma_D}{\sqrt{n}} \Rightarrow \text{قبول الفرضية } H_0 \\ |\bar{D}| > t_{1-\alpha} \frac{\sigma_D}{\sqrt{n}} \Rightarrow \text{رفض الفرضية } H_0 \end{cases}$$

إذا كان حجم العينة $n \geq 30$

إذا كنا نرغب في اختبار تساوي وسطي مجتمعين مرتبطين فإننا نقوم بصياغة الفرضيات التالية:

$$\begin{aligned} H_0: \mu_d &= 0 \\ H_1: \mu_d &\neq 0 \\ H_1: \mu_d &> 0 \quad \text{أو} \\ H_1: \mu_d &< 0 \quad \text{أو} \end{aligned}$$

إحصاء الاختبار هي:

$$Z = \frac{\bar{D} - \mu_D}{\frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

وتكون قاعدة اتخاذ القرار إذا كانت الفرضية البديلة ذات الطرفين على الشكل التالي:

$$\begin{cases} Z_0 \in \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}, Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right] \Rightarrow \text{قبول الفرضية } H_0 \\ Z_0 \notin \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}, Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right] \Rightarrow \text{رفض الفرضية } H_0 \end{cases}$$

أما إذا كانت الفرضية البديلة ذات الطرف فتكون قاعدة اتخاذ القرار على الشكل التالي:

$$\begin{cases} |\bar{D} - \mu_D| \leq Z_{1-\alpha} \frac{\sigma_D}{\sqrt{n}} \Rightarrow \text{قبول الفرضية } H_0 \\ |\bar{D} - \mu_D| > Z_{1-\alpha} \frac{\sigma_D}{\sqrt{n}} \Rightarrow \text{رفض الفرضية } H_0 \end{cases}$$

مثال:

يعطي الجدول التالي قياس ضغط الدم قبل وبعد تناول دواء معين لخمسة أشخاص:

170	176	172	180	172	x_i قبل الدواء
157	178	173	174	168	y_i بعد الدواء

المطلوب: اختبار الفرضيات التالية عند مستوى المعنوية 0.05 :

$$H_0: \mu_d = 0$$

$$H_1: \mu_d \neq 0$$

الحل:

13	-2	-1	6	4	d_i
----	----	----	---	---	-------

$$\bar{D} = 4$$

$$S_D = 6.04$$

لدينا حجم العينة $n < 30$ ومنه إحصاء الاختبار هي:

$$T = \frac{\bar{D} - \mu_D}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

وعندما نعتبر صحيحة H_0 تكون قيمة الإحصاء هي:

$$T_0 = \frac{4}{6.04/\sqrt{5}} = 1.48$$

عند مستوى المعنوية 0.05 وبما أن فرضية العدم ذات طرفين فإن القيمة الجدولية تحسب كما يلي:

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} = t_{0.975, 4} = 2.776$$

نلاحظ أن القيمة المحسوبة T_0 تقع في منطقة قبول H_0 ومنه نقبل H_0 عند مستوى المعنوية 0.05.