Centre universitaire Abdelhafid Boussouf – Mila
Institut de Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques
1ère année Master : Modélisation Mathématique et Techniques de Décision

Contrôle Optimal et application en économie financière

Chapitre 2 : La théorie de contrôle optimal.

Présenté par:
AZI Mourad

April 21, 2025

Plan de cours

Introduction

- **Le monde réel est un processus de changement dynamique, le temps étant devenu d’une importance cruciale pour tous les processus décisionnels;**

Introduction

Introduction

- Le monde réel est un processus de changement dynamique, le temps étant devenu d'une importance cruciale pour tous les processus décisionnels;
- **La temporalité dans l'action intervient dans la majorité de problème, ce qui fait que tous les types de décision doivent être considérés et analysés dans le contexte du temps;**

Introduction

- Le monde réel est un processus de changement dynamique, le temps étant devenu d'une importance cruciale pour tous les processus décisionnels;
- La temporalité dans l'action intervient dans la majorité de problème, ce qui fait que tous les types de décision doivent être considérés et analysés dans le contexte du temps;
- **La théorie du contrôle optimal traite des problèmes d'optimisation des systèmes dynamiques dépendant d'un paramètre appelé contrôle (commande);**

Introduction

Introduction

- Le monde réel est un processus de changement dynamique, le temps étant devenu d'une importance cruciale pour tous les processus décisionnels;
- La temporalité dans l'action intervient dans la majorité de problème, ce qui fait que tous les types de décision doivent être considérés et analysés dans le contexte du temps;
- La théorie du contrôle optimal traite des problèmes d'optimisation des systèmes dynamiques dépendant d'un paramètre appelé contrôle (commande);
- **Les modèles de contrôle optimal, peuvent être confédérer les plus fidèle au situation décisionnelle dans la majorité de problème;**

Introduction

Objectif du chapitre :

- **Présenter les aspects théoriques de la théorie du contrôle optimal;**

Introduction

Objectif du chapitre :

- Présenter les aspects théoriques de la théorie du contrôle optimal;
- **Etudier le principe du maximum (Conditions d'optimalité) pour différentes classes de problèmes de contrôle optimal.**

Histoire du contrôle optimal

Origines

- **L'origines est le calcul des variations :**

Histoire du contrôle optimal

Origines

- **L'origines est le calcul des variations** :
  - **Créé au XVIIe siècle, avec Fermat (1662) sur la loi de la réfraction de la lumière et Newton (1686) sur la forme optimale de la proue d'un navire.**

Histoire du contrôle optimal

Origines

- **L'origines est le calcul des variations** :
  - Créé au XVIIe siècle, avec Fermat (1662) sur la loi de la réfraction de la lumière et Newton (1686) sur la forme optimale de la proue d'un navire.
  - **Le problème de la *brachistochrone* (1696) de Johann Bernoulli est souvent considéré comme le début du calcul des variations.**

Histoire du contrôle optimal

Origines

- **L'origines est le calcul des variations** :
  - Créé au XVIIe siècle, avec Fermat (1662) sur la loi de la réfraction de la lumière et Newton (1686) sur la forme optimale de la proue d'un navire.
  - Le problème de la *brachistochrone* (1696) de Johann Bernoulli est souvent considéré comme le début du calcul des variations.
- **Autre contributions majeures au calcul des variations (1696-1900) :**

Histoire du contrôle optimal

Origines

- **L'origines est le calcul des variations** :
  - Créé au XVIIe siècle, avec Fermat (1662) sur la loi de la réfraction de la lumière et Newton (1686) sur la forme optimale de la proue d'un navire.
  - Le problème de la *brachistochrone* (1696) de Johann Bernoulli est souvent considéré comme le début du calcul des variations.
- **Autre contributions majeures au calcul des variations (1696-1900)** :
  - **De nombreux savants comme les frères Bernoulli, Euler, Newton, Leibniz, Lagrange, Jacobi, Hamilton, et Weierstrass ont contribué au développement du calcul des variations.**

Histoire du contrôle optimal

Origines

- **L'origines est le calcul des variations** :
  - Créé au XVIIe siècle, avec Fermat (1662) sur la loi de la réfraction de la lumière et Newton (1686) sur la forme optimale de la proue d'un navire.
  - Le problème de la *brachistochrone* (1696) de Johann Bernoulli est souvent considéré comme le début du calcul des variations.
- **Autre contributions majeures au calcul des variations (1696-1900)** :
  - De nombreux savants comme les frères Bernoulli, Euler, Newton, Leibniz, Lagrange, Jacobi, Hamilton, et Weierstrass ont contribué au développement du calcul des variations.
  - **Au XIXe siècle, la théorie du calcul des variations a été approfondie, notamment par Hamilton et Weierstrass, avec des applications en mécanique analytique.**

Histoire du contrôle optimal

Développement du contrôle optimal

- **Développement du contrôle optimal :**

Histoire du contrôle optimal

Développement du contrôle optimal

- **Développement du contrôle optimal :**
  - **En 1924, la théorie du contrôle optimal a émergé, grâce aux travaux de David Hilbert, Oskar Bolza, et L. M. Graves, qui ont introduit les contraintes particulières dans les équations différentielles.**

Histoire du contrôle optimal

Développement du contrôle optimal

- **Développement du contrôle optimal** :
  - En 1924, la théorie du contrôle optimal a émergé, grâce aux travaux de David Hilbert, Oskar Bolza, et L. M. Graves, qui ont introduit les contraintes particulières dans les équations différentielles.
  - **Le passage au contrôle optimal moderne s'est fait en 1926 par les travaux de C. Carathéodory, qui a formulé la condition nécessaire de Weierstrass avec le Hamiltonien.**

Histoire du contrôle optimal

Développement du contrôle optimal

- **Développement du contrôle optimal** :
  - En 1924, la théorie du contrôle optimal a émergé, grâce aux travaux de David Hilbert, Oskar Bolza, et L. M. Graves, qui ont introduit les contraintes particulières dans les équations différentielles.
  - Le passage au contrôle optimal moderne s'est fait en 1926 par les travaux de C. Carathéodory, qui a formulé la condition nécessaire de Weierstrass avec le Hamiltonien.
- **1950s : Principe du Maximum et la théorie du contrôle optimal moderne :**

Histoire du contrôle optimal

Développement du contrôle optimal

- **Développement du contrôle optimal** :
  - En 1924, la théorie du contrôle optimal a émergé, grâce aux travaux de David Hilbert, Oskar Bolza, et L. M. Graves, qui ont introduit les contraintes particulières dans les équations différentielles.
  - Le passage au contrôle optimal moderne s'est fait en 1926 par les travaux de C. Carathéodory, qui a formulé la condition nécessaire de Weierstrass avec le Hamiltonien.
- **1950s : Principe du Maximum et la théorie du contrôle optimal moderne** :
  - **En 1958, le livre de Pontriaguine et ses collaborateurs "The Mathematical Theory of Optimal Processes" a formulé le *Principe du Maximum*, révolutionnant la théorie du contrôle optimal.**

Histoire du contrôle optimal

Développement du contrôle optimal

- **Développement du contrôle optimal** :
  - En 1924, la théorie du contrôle optimal a émergé, grâce aux travaux de David Hilbert, Oskar Bolza, et L. M. Graves, qui ont introduit les contraintes particulières dans les équations différentielles.
  - Le passage au contrôle optimal moderne s'est fait en 1926 par les travaux de C. Carathéodory, qui a formulé la condition nécessaire de Weierstrass avec le Hamiltonien.
- **1950s : Principe du Maximum et la théorie du contrôle optimal moderne** :
  - En 1958, le livre de Pontriaguine et ses collaborateurs "The Mathematical Theory of Optimal Processes" a formulé le *Principe du Maximum*, révolutionnant la théorie du contrôle optimal.
  - **Ce principe a été développé dans le contexte de l'ingénierie, avec les problèmes de pilotage des avions, en collaboration avec les mathématiciens de l'Institut de mathématiques Steklov de Moscou.**

Développement du contrôle optimal

- **Contribution de Richard Bellman et programmation dynamique :**

Histoire du contrôle optimal

Développement du contrôle optimal

- **Contribution de Richard Bellman et programmation dynamique :**
  - **La *programmation dynamique* de Bellman (1950s) a été une approche importante du contrôle optimal.**

Histoire du contrôle optimal

Développement du contrôle optimal

- **Contribution de Richard Bellman et programmation dynamique** :
  - La *programmation dynamique* de Bellman (1950s) a été une approche importante du contrôle optimal.
  - **En 1994, Pesch et Bulirsch ont démontré que les idées du principe du maximum et de l'équation de Bellman étaient déjà présentes dans les travaux de Carathéodory dans les années 1920-1930.**

Applications économiques

- **Applications économiques (XXe siècle) :**

Histoire du contrôle optimal

Applications économiques

- **Applications économiques (XXe siècle) :**
  - **Le calcul des variations a été appliqué à l'économie avec les travaux de Evans (1924) et Ramsey (1928) sur la tarification dynamique et l'accumulation du capital.**

Applications économiques

- **Applications économiques (XXe siècle)** :
  - Le calcul des variations a été appliqué à l'économie avec les travaux de Evans (1924) et Ramsey (1928) sur la tarification dynamique et l'accumulation du capital.
  -

Histoire du contrôle optimal

Applications économiques

- **Applications économiques (XXe siècle)** :
  - Le calcul des variations a été appliqué à l'économie avec les travaux de Evans (1924) et Ramsey (1928) sur la tarification dynamique et l'accumulation du capital.
  -
  - **1924 – *Evans* étudie le problème de la tarification dynamique pour un monopoleur, l'une des premières applications du contrôle optimal en économie.**

Applications économiques

- **Applications économiques (XXe siècle)** :
  - Le calcul des variations a été appliqué à l'économie avec les travaux de Evans (1924) et Ramsey (1928) sur la tarification dynamique et l'accumulation du capital.
  -
  - **1924** – *Evans* étudie le problème de la tarification dynamique pour un monopoleur, l'une des premières applications du contrôle optimal en économie.
  - **1928 – *Ramsey* analyse l'accumulation du capital néoclassique en utilisant l'équation d'Euler, appliquant l'optimisation dynamique à la croissance économique.**

Applications économiques

- **Applications économiques (XXe siècle)** :
  - Le calcul des variations a été appliqué à l'économie avec les travaux de Evans (1924) et Ramsey (1928) sur la tarification dynamique et l'accumulation du capital.
  -
  - **1924** – *Evans* étudie le problème de la tarification dynamique pour un monopoleur, l'une des premières applications du contrôle optimal en économie.
  - **1928** – *Ramsey* analyse l'accumulation du capital néoclassique en utilisant l'équation d'Euler, appliquant l'optimisation dynamique à la croissance économique.
  - **1950s – Introduction de la *programmation dynamique* par *Richard Bellman*, avec un impact majeur dans l'optimisation des décisions économiques dans des contextes dynamiques (planification de la production et gestion des ressources).**

Histoire du contrôle optimal

Applications économiques

- **Applications économiques (XXe siècle) :**

Applications économiques

- **Applications économiques (XXe siècle) :**
  - **1960s – *Minsky* et d'autres économistes appliquent le contrôle optimal pour étudier la dynamique des cycles économiques et la gestion des investissements dans un cadre macroéconomique.**

Histoire du contrôle optimal

Applications économiques

- **Applications économiques (XXe siècle)** :
  - **1960s** – *Minsky* et d'autres économistes appliquent le contrôle optimal pour étudier la dynamique des cycles économiques et la gestion des investissements dans un cadre macroéconomique.
  - **1970s – *Chakravarty et Leontief* utilisent le contrôle optimal dans des modèles économiques multi-sectoriels pour étudier la planification de la production à long terme et la gestion des ressources naturelles.**

Histoire du contrôle optimal

Applications économiques

- **Applications économiques (XXe siècle) :**
  - **1960s** – *Minsky* et d'autres économistes appliquent le contrôle optimal pour étudier la dynamique des cycles économiques et la gestion des investissements dans un cadre macroéconomique.
  - **1970s** – *Chakravarty et Leontief* utilisent le contrôle optimal dans des modèles économiques multi-sectoriels pour étudier la planification de la production à long terme et la gestion des ressources naturelles.
  - **1980s – *Pindyck et Solow* appliquent le contrôle optimal à la gestion des stocks d'énergie et des ressources naturelles, se concentrant sur la dynamique de production et consommation dans des systèmes économiques complexes.**

Histoire du contrôle optimal

Applications économiques

- **Applications économiques (XXe siècle) :**
  - **1960s** – *Minsky* et d'autres économistes appliquent le contrôle optimal pour étudier la dynamique des cycles économiques et la gestion des investissements dans un cadre macroéconomique.
  - **1970s** – *Chakravarty et Leontief* utilisent le contrôle optimal dans des modèles économiques multi-sectoriels pour étudier la planification de la production à long terme et la gestion des ressources naturelles.
  - **1980s** – *Pindyck et Solow* appliquent le contrôle optimal à la gestion des stocks d'énergie et des ressources naturelles, se concentrant sur la dynamique de production et consommation dans des systèmes économiques complexes.
  - **1990s – Le contrôle optimal est utilisé pour modéliser l'optimisation des politiques fiscales et monétaires dans les économies de marché, avec des applications à la *théorie des jeux dynamiques* pour analyser les politiques économiques intertemporelles.**

Plan de cours

Formulation d’un problème de contrôle optimal

- **La modélisation:**

Formulation d'un problème de contrôle optimal

- La **modélisation**:
  - **La modélisation est la partie la plus importante de la résolution de tout problème pratique;**

Problème de contrôle optimal

Formulation d'un problème de contrôle optimal

- La **modélisation**:
  - La **modélisation** est la partie la plus importante de la résolution de tout problème pratique;
  - **La modélisation nécessite une *description mathématique réaliste, simple et fidèle* à la situation réelle (physique, économique, etc.).**

Formulation d'un problème de contrôle optimal

- La **modélisation**:
  - La **modélisation** est la partie la plus importante de la résolution de tout problème pratique;
  - La modélisation nécessite une *description mathématique réaliste, simple et fidèle* à la situation réelle (physique, économique, etc.).
- **La formulation d'un problème de contrôle optimal nécessite :**

Formulation d’un problème de contrôle optimal

- La **modélisation**:
  - La **modélisation** est la partie la plus importante de la résolution de tout problème pratique;
  - La modélisation nécessite une *description mathématique réaliste, simple et fidèle* à la situation réelle (physique, économique, etc.).
- La **formulation d’un problème de contrôle optimal** nécessite :
  - **La description mathématique du processus à contrôler;**

Problème de contrôle optimal

Formulation d'un problème de contrôle optimal

- La **modélisation**:
  - La **modélisation** est la partie la plus importante de la résolution de tout problème pratique;
  - La modélisation nécessite une *description mathématique réaliste, simple et fidèle* à la situation réelle (physique, économique, etc.).
- La **formulation d'un problème de contrôle optimal** nécessite :
  - La description mathématique du processus à contrôler;
  - **L'imposition de contraintes physiques au système;**

Problème de contrôle optimal

Formulation d'un problème de contrôle optimal

- La **modélisation**:
  - La **modélisation** est la partie la plus importante de la résolution de tout problème pratique;
  - La modélisation nécessite une *description mathématique réaliste, simple et fidèle* à la situation réelle (physique, économique, etc.).
- La **formulation d'un problème de contrôle optimal** nécessite :
  - La description mathématique du processus à contrôler;
  - L'imposition de contraintes physiques au système;
  - **La détermination du critère de performance à optimiser (objectif du contrôle).**

Système de contrôle

- **Système différentiel explicite :**

Système de contrôle

- **Système différentiel explicite :**
  - **Le système est décrit par l'équation différentielle :**

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = f(x(t), t), \quad x(0) = x^0$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est la variable d'état et x^0 l'état initial. La fonction f est une fonction vectorielle, qui peut être linéaire ou non linéaire.

Système de contrôle

- **Système différentiel explicite** :
  - Le système est décrit par l'équation différentielle :

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = f(x(t), t), \quad x(0) = x^0$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est la variable d'état et x^0 l'état initial. La fonction f est une fonction vectorielle, qui peut être linéaire ou non linéaire.

- **Introduction du contrôle :**

Système de contrôle

- **Système différentiel explicite** :
  - Le système est décrit par l'équation différentielle :

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = f(x(t), t), \quad x(0) = x^0$$

  où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est la variable d'état et x^0 l'état initial. La fonction f est une fonction vectorielle, qui peut être linéaire ou non linéaire.

- **Introduction du contrôle** :
  - **(Contrôler le système) Un paramètre de contrôle $u(t) \in \mathbb{R}^r$ est introduit, avec $u(t)$ une fonction localement intégrable définie sur $[0, t^*]$.**

Système de contrôle

- **Système différentiel explicite** :
  - Le système est décrit par l'équation différentielle :

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = f(x(t), t), \quad x(0) = x^0$$

    où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est la variable d'état et x^0 l'état initial. La fonction f est une fonction vectorielle, qui peut être linéaire ou non linéaire.

- **Introduction du contrôle** :
  - (Contrôler le système) Un paramètre de contrôle $u(t) \in \mathbb{R}^r$ est introduit, avec $u(t)$ une fonction localement intégrable définie sur $[0, t^*]$.
  - **Le système modifié devient : :**

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(0) = x^0$$

Système de contrôle

- **Système différentiel explicite :**
  - Le système est décrit par l'équation différentielle :

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = f(x(t), t), \quad x(0) = x^0$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est la variable d'état et x^0 l'état initial. La fonction f est une fonction vectorielle, qui peut être linéaire ou non linéaire.

- **Introduction du contrôle :**
  - (Contrôler le système) Un paramètre de contrôle $u(t) \in \mathbb{R}^r$ est introduit, avec $u(t)$ une fonction localement intégrable définie sur $[0, t^*]$.
  - **Le système modifié devient : :**

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(0) = x^0$$

Système de contrôle

- **Système différentiel explicite** :
  - Le système est décrit par l'équation différentielle :

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = f(x(t), t), \quad x(0) = x^0$$

  où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est la variable d'état et x^0 l'état initial. La fonction f est une fonction vectorielle, qui peut être linéaire ou non linéaire.

- **Introduction du contrôle** :
  - (Contrôler le système) Un paramètre de contrôle $u(t) \in \mathbb{R}^r$ est introduit, avec $u(t)$ une fonction localement intégrable définie sur $[0, t^*]$.
  - **Le système modifié devient :** :

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(0) = x^0$$

  On suppose que $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ vérifie les conditions du théorème de Cauchy.

Classe des commandes admissibles

Classe des commandes admissibles

U est l'ensemble des commandes admissibles, lequel peut être :

- **non borné :** $u(t) \in \mathbb{R}^r$ **sans restriction ;**

Classe des commandes admissibles

U est l'ensemble des commandes admissibles, lequel peut être :

- non borné : $u(t) \in \mathbb{R}^r$ sans restriction ;
- **borné : Dans de nombreux problèmes de contrôle, on peut majorer et minorer les paramètres $u_j(t)$ ($1 \leq j \leq r$) par des constantes. Considérons, pour ce type de problème, la contrainte $a_j \leq u_j \leq b_j$. Lorsque u est borné, il est pratique de ramener les commandes à l'intervalle $[-1, 1]$. On peut remplacer u_j par v_j en posant**

  $$u_j = \frac{1}{2}(a_j + b_j) + \frac{1}{2}(a_j - b_j)v_j,$$

  ainsi v_j est également intégrable et on a $-1 \leq v_j \leq 1, \ j = 1, \ldots, r$.

Classe des commandes admissibles

Classe des commandes admissibles

U est l'ensemble des commandes admissibles, lequel peut être :

- non borné : $u(t) \in \mathbb{R}^r$ sans restriction ;
- borné : Dans de nombreux problèmes de contrôle, on peut majorer et minorer les paramètres $u_j(t)$ $(1 \leq j \leq r)$ par des constantes. Considérons, pour ce type de problème, la contrainte $a_j \leq u_j \leq b_j$. Lorsque u est borné, il est pratique de ramener les commandes à l'intervalle $[-1, 1]$. On peut remplacer u_j par v_j en posant
$$u_j = \frac{1}{2}(a_j + b_j) + \frac{1}{2}(a_j - b_j)v_j,$$
ainsi v_j est également intégrable et on a $-1 \leq v_j \leq 1, \; j = 1, \ldots, r$.
- **de type Bang-Bang : c'est un contrôle qui bascule brusquement entre deux valeurs, souvent utilisé pour contrôler un système acceptant une entrée binaire. En d'autres termes, un contrôle $u \in \mathbb{R}^r$ est dit bang-bang si, pour tout instant t et pour chaque indice $j = 1, \ldots, r$, on a $|u_j(t)| = 1$. Une commande bang-bang présente au moins un instant de commutation.**

Plan de cours

Problème de contrôle optimale

- **Considérant le Système dynamique :**

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t), \quad x(0) = x^0, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^r$$

Problème de contrôle optimale

Problème de contrôle optimale

- Considérant le **Système dynamique :**

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t), \quad x(0) = x^0, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^r$$

- **Objectif : Minimiser une fonctionnelle de la forme :**

$$J(u) = S(x(t^*), t^*) + \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t)\, dt$$

où F est une fonction de $\mathbb{R}^n \times U \times [0, t^*] \to \mathbb{R}$.

Problème de contrôle optimale

- **Objectif : Minimiser une fonctionnelle de la forme :**

$$J(u) = S(x(t^*), t^*) + \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t)\, dt$$

Problème de contrôle optimale

- **Objectif :** Minimiser une fonctionnelle de la forme :

$$J(u) = S(x(t^*), t^*) + \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t)\, dt$$

- **Critères de performance : On peut classer les fonctions objectifs en :**

Problème de contrôle optimale

- **Objectif :** Minimiser une fonctionnelle de la forme :

$$J(u) = S(x(t^*), t^*) + \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t)\, dt$$

- **Critères de performance :** On peut classer les fonctions objectifs en :

  1. **Temps optimal :**

Problème de contrôle optimale

- **Objectif :** Minimiser une fonctionnelle de la forme :

$$J(u) = S(x(t^*), t^*) + \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t)\, dt$$

- **Critères de performance :** On peut classer les fonctions objectifs en :
  1. **Temps optimal** :
     - $F(x(t), u(t), t) = 1,$

Problème de contrôle optimale

- **Objectif :** Minimiser une fonctionnelle de la forme :

$$J(u) = S(x(t^*), t^*) + \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t)\, dt$$

- **Critères de performance :** On peut classer les fonctions objectifs en :
  1. **Temps optimal :**
     - $F(x(t), u(t), t) = 1$,
     - $S(x(t^*), t^*) = 0$,

Problème de contrôle optimale

- **Objectif :** Minimiser une fonctionnelle de la forme :

$$J(u) = S(x(t^*), t^*) + \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t)\, dt$$

- **Critères de performance :** On peut classer les fonctions objectifs en :

  1. **Temps optimal** :
     - $F(x(t), u(t), t) = 1$,
     - $S(x(t^*), t^*) = 0$,
     - **Le temps final t^* est libre.**

Problème de contrôle optimale

- **Objectif :** Minimiser une fonctionnelle de la forme :

$$J(u) = S(x(t^*), t^*) + \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t)\, dt$$

- **Critères de performance :** On peut classer les fonctions objectifs en :
  1. **Temps optimal :**
     - $F(x(t), u(t), t) = 1,$
     - $S(x(t^*), t^*) = 0,$
     - Le temps final t^* est libre.
  2. **Coût optimal :**

Problème de contrôle optimale

- **Objectif :** Minimiser une fonctionnelle de la forme :

$$J(u) = S(x(t^*), t^*) + \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t)\, dt$$

- **Critères de performance :** On peut classer les fonctions objectifs en :
  1. **Temps optimal** :
     - $F(x(t), u(t), t) = 1$,
     - $S(x(t^*), t^*) = 0$,
     - Le temps final t^* est libre.
  2. **Coût optimal** :
     - **Le temps final t^* est fixé et le critère est :**

$$J(u) = S(x(t^*)) + \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t)\, dt$$

Problème de contrôle optimale

- **Objectif :** Minimiser une fonctionnelle de la forme :

$$J(u) = S(x(t^*), t^*) + \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t)\, dt$$

- **Critères de performance :** On peut classer les fonctions objectifs en :

1. **Temps optimal :**
   - $F(x(t), u(t), t) = 1$,
   - $S(x(t^*), t^*) = 0$,
   - Le temps final t^* est libre.
2. **Coût optimal :**
   - Le temps final t^* est fixé et le critère est :

$$J(u) = S(x(t^*)) + \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t)\, dt$$

3. **Temps et coût minimal : Combine les deux critères précédents.**

Classes de problèmes de contrôle optimal

Selon la forme du crit'ere de qualité, on distingue:

1. **Problème de Lagrange (1762) : LA Fonction coût s'écrit:**

$$J(u) = \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t)\, dt$$

Problème de contrôle optimale

Classes de problèmes de contrôle optimal

Selon la forme du crit'ere de qualité, on distingue:

1. **Problème de Lagrange (1762) :** LA Fonction coût s'écrit:

$$J(u) = \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t)\, dt$$

2. **Problème de Mayer (1878) : Le critère dépend uniquement de la valeur terminale de l'état :**

$$J(u) = S(x(t^*), t^*)$$

Problème de contrôle optimale

Classes de problèmes de contrôle optimal

Selon la forme du crit'ere de qualité, on distingue:

1. **Problème de Lagrange (1762) :** LA Fonction coût s'écrit:

$$J(u) = \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t)\, dt$$

2. **Problème de Mayer (1878) :** Le critère dépend uniquement de la valeur terminale de l'état :

$$J(u) = S(x(t^*), t^*)$$

3. **Problème de Bolza (1913) : Combine les deux critères (Lagrange et Mayer) :**

$$J(u) = S(x(t^*), t^*) + \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t)\, dt$$