Centre universitaire Abdelhafid Boussouf – Mila
Institut de Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques
1ère année Master : Modélisation Mathématique et Techniques de Décision

Contrôle Optimal et application en économie financière

Chapitre 1 : Introduction à la théorie de contrôle.

Présenté par:
AZI Mourad

April 21, 2025

Plan de cours

Plan de cours

Notion de stabilité

Considérons le système différentiel dans $\mathbb{R}^n$:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0. \tag{1}$$

Notion de stabilité

Considérons le système différentiel dans $\mathbb{R}^n$:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0. \tag{1}$$

Définition 2.1 (Point d'équilibre)

Un point x^* est un point d'équilibre du système (1) s'il satisfait $f(x^*) = 0$.

Notion de stabilité

Considérons le système différentiel dans $\mathbb{R}^n$:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0. \tag{1}$$

Définition 2.1 (Point d'équilibre)

Un point x^* est un point d'équilibre du système (1) s'il satisfait $f(x^*) = 0$.

Définition 2.2 (Point attractif)

On dira que x^* est localement attractif pour le système (1) s'il existe un voisinage V de x^* tel que, pour tout $x \in V$, $\lim_{t \to \infty} x(t) = x^*$. Si $V = \mathbb{R}^n$, on dira que x^* est globalement attractif.

Notion de stabilité

Définition (Stable)

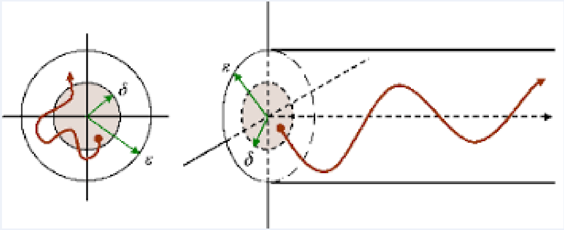
Le point d'équilibre x^* est dit stable si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \|x_0 - x^*\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x^*\| < \varepsilon, \quad \forall t > 0. \qquad (2)$$

Définition (Stable)

Le point d'équilibre x^* est dit stable si et seulement si :

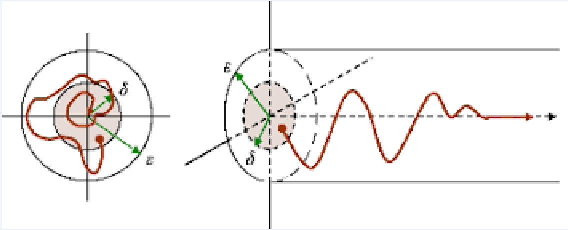
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \|x_0 - x^*\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x^*\| < \varepsilon, \quad \forall t > 0. \qquad (2)$$



Définition (Asymptotiquement stable)

Le point d'équilibre x^* est dit asymptotiquement stable s'il est stable et s'il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\|x_0 - x^*\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} x(t) = x^*. \tag{3}$$



Notion de stabilité

Définition (Globalement asymptotiquement stable)

Le point d'équilibre x^* est dit globalement asymptotiquement stable s'il est stable et que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = x^*. \tag{4}$$

Notion de stabilité

Définition (Globalement asymptotiquement stable)

Le point d'équilibre x^* est dit globalement asymptotiquement stable s'il est stable et que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = x^*. \tag{4}$$

Définition (Localement exponentiellement stable)

Le point d'équilibre x^* est dit localement exponentiellement stable s'il existe trois nombres réels positifs δ, ε et λ tels que :

$$\|x(0) - x^*\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|x(t) - x^*\| < \varepsilon \|x(0) - x^*\| e^{-\lambda t}, \quad \forall t > 0. \tag{5}$$

Plan de cours

Théorème 2.1

Considérons le système dynamique linéaire $\dot{x} = Ax$.

- Si, pour un certain j, $Re(\lambda_j) > 0$ ou s'il existe un k tel que $Re(\lambda_k) = 0$ et $\nu(\lambda_k) > 1$, alors $x = 0$ est instable.

L'indice $\nu(\lambda)$ d'une valeur propre λ est le premier entier tel que la suite croissante des noyaux

$$\ker(A - \lambda I)^{\nu} \subseteq \ker(A - \lambda I)^{\nu+1}$$

devient constante.

Stabilité des systèmes dynamiques linéaires

Théorème 2.1

Considérons le système dynamique linéaire $\dot{x} = Ax$.

- Si, pour un certain j, $Re(\lambda_j) > 0$ ou s'il existe un k tel que $Re(\lambda_k) = 0$ et $\nu(\lambda_k) > 1$, alors $x = 0$ est instable.
- Si, pour tout j, $Re(\lambda_j) < 0$, alors $x = 0$ est globalement exponentiellement stable.

L'indice $\nu(\lambda)$ d'une valeur propre λ est le premier entier tel que la suite croissante des noyaux

$$\ker(A - \lambda I)^{\nu} \subseteq \ker(A - \lambda I)^{\nu+1}$$

devient constante.

Théorème 2.1

Considérons le système dynamique linéaire $\dot{x} = Ax$.

- Si, pour un certain j, $Re(\lambda_j) > 0$ ou s'il existe un k tel que $Re(\lambda_k) = 0$ et $\nu(\lambda_k) > 1$, alors $x = 0$ est instable.
- Si, pour tout j, $Re(\lambda_j) < 0$, alors $x = 0$ est globalement exponentiellement stable.
- Si, pour tout j, $Re(\lambda_j) \leq 0$ et s'il existe un k tel que $Re(\lambda_k) = 0$ avec $\nu(\lambda_k) = 1$, alors $x = 0$ est stable mais non attractif.

L'indice $\nu(\lambda)$ d'une valeur propre λ est le premier entier tel que la suite croissante des noyaux

$$\ker(A - \lambda I)^{\nu} \subseteq \ker(A - \lambda I)^{\nu+1}$$

devient constante.

Propriétés d'un système linéaire

Pour un système linéaire, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- L'origine est attractif ;

Propriétés d'un système linéaire

Pour un système linéaire, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- L'origine est attractif ;
- L'origine est globalement attractive ;

Propriétés d'un système linéaire

Pour un système linéaire, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- L'origine est attractif ;
- L'origine est globalement attractive ;
- L'origine est asymptotiquement stable ;

Propriétés d'un système linéaire

Pour un système linéaire, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- L'origine est attractif ;
- L'origine est globalement attractive ;
- L'origine est asymptotiquement stable ;
- L'origine est globalement asymptotiquement stable ;

Propriétés d'un système linéaire

Pour un système linéaire, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- L'origine est attractif ;
- L'origine est globalement attractive ;
- L'origine est asymptotiquement stable ;
- L'origine est globalement asymptotiquement stable ;
- L'origine est exponentiellement stable ;

Propriétés d'un système linéaire

Pour un système linéaire, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- L'origine est attractif ;
- L'origine est globalement attractive ;
- L'origine est asymptotiquement stable ;
- L'origine est globalement asymptotiquement stable ;
- L'origine est exponentiellement stable ;
- L'origine est globalement exponentiellement stable ;

Propriétés d'un système linéaire

Pour un système linéaire, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- L'origine est attractif ;
- L'origine est globalement attractive ;
- L'origine est asymptotiquement stable ;
- L'origine est globalement asymptotiquement stable ;
- L'origine est exponentiellement stable ;
- L'origine est globalement exponentiellement stable ;
- Toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle strictement négative (on dit alors que la matrice A est de Hurwitz).

Plan de cours

Stabilisation des systèmes de contrôle

- Stabilité des systèmes dynamiques
  - Notion de stabilité
- Stabilité des systèmes dynamiques linéaires
- Stabilité des systèmes dynamiques non linéaires
  - Méthode indirecte (linéarisation du système non linéaire)
  - Méthode directe (fonction de Lyapunov)

Stabilisation des systèmes dynamiques de contrôle

- Stabilisation des systèmes linéaires
- Stabilisation des systèmes non linéaires
  - Conditions nécessaires de Brockett
  - Approximation locale (linéarisation)
  - Fonction de Lyapunov contrôlée
  - Système partiellement linéaire

Stabilité des systèmes non linéaires

Considérons le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X), \\ X(0) = X_0. \end{cases}$$

Pour étudier la stabilité d'un système non linéaire, on utilise deux méthodes :

- La méthode indirecte, basée sur la linéarisation de la fonction F ;

Stabilité des systèmes non linéaires

Considérons le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X), \\ X(0) = X_0. \end{cases}$$

Pour étudier la stabilité d'un système non linéaire, on utilise deux méthodes :

- La méthode indirecte, basée sur la linéarisation de la fonction F ;
- La méthode directe, fondée sur l'utilisation d'une fonction appelée fonction de Lyapunov.

Méthode indirecte

Soit le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X), \\ X(0) = X_0. \end{cases} \tag{6}$$

Avec $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1, c'est-à-dire $F = (f_1, \ldots, f_n)$ où $f_1, \ldots, f_n$ sont des applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telles que les dérivées partielles $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ existent pour tout $i, j = 1, \ldots, n$.

Méthode indirecte

La méthode indirecte pour étudier la stabilité autour d'un point d'équilibre consiste à étudier le système linéarisé, défini par :

$$A = Df(0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(0) \end{pmatrix}.$$

Méthode indirecte

Théorème 2.2

Considérons le système d'équations différentielles (6), et supposons que $x^* = 0$ est un point d'équilibre de F, F étant continue et différentiable dans un voisinage $D \subset \mathbb{R}^n$ contenant l'origine.
La linéarisation du système (6) autour du point d'équilibre donne le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

avec la matrice jacobienne

$$A = \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x=0}.$$

Alors :

- Si la partie réelle de toutes les valeurs propres de A est strictement négative, i.e. $Re(\lambda) < 0$, alors le point d'équilibre est asymptotiquement stable.

Méthode indirecte

Théorème 2.2

Considérons le système d'équations différentielles (6), et supposons que $x^* = 0$ est un point d'équilibre de F, F étant continue et différentiable dans un voisinage $D \subset \mathbb{R}^n$ contenant l'origine.
La linéarisation du système (6) autour du point d'équilibre donne le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

avec la matrice jacobienne

$$A = \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{x=0}.$$

Alors :

- Si la partie réelle de toutes les valeurs propres de A est strictement négative, i.e. $Re(\lambda) < 0$, alors le point d'équilibre est asymptotiquement stable.
- Si le système linéarisé possède une valeur propre dont la partie réelle est strictement positive, i.e. $Re(\lambda) > 0$, alors le point d'équilibre est instable.

Méthode directe (fonction de Lyapunov)

Soit $V : U \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un voisinage U de l'origine, admettant des dérivées partielles continues. On définit la dérivée de V dans la direction du champ de vecteurs f par :

$$\dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(x)\, f_i(x).$$

Cette dérivée, appelée dérivée de Lie de V, se note $L_f V$.

Méthode directe (fonction de Lyapunov)

Définition (Fonction de Lyapunov)

On dit que V est une fonction de Lyapunov pour le système (6) en $x = 0$ dans U si, pour tout $x \in U$:

- $V(0) = 0$ et $V(x) > 0$ pour $x \neq 0$;

Méthode directe (fonction de Lyapunov)

Définition (Fonction de Lyapunov)

On dit que V est une fonction de Lyapunov pour le système (6) en $x = 0$ dans U si, pour tout $x \in U$:

- $V(0) = 0$ et $V(x) > 0$ pour $x \neq 0$;
- $\dot{V}(x) \leq 0$;

Méthode directe (fonction de Lyapunov)

Définition (Fonction de Lyapunov)

On dit que V est une fonction de Lyapunov pour le système (6) en $x = 0$ dans U si, pour tout $x \in U$:

- $V(0) = 0$ et $V(x) > 0$ pour $x \neq 0$;
- $\dot{V}(x) \leq 0$;
- Si de plus $\dot{V}(x) < 0$ pour $x \neq 0$, alors V est dite une fonction de Lyapunov stricte.

Méthode directe (fonction de Lyapunov)

Théorème 2.3

- Si le point d'équilibre $x = 0$ admet une fonction de Lyapunov, alors il est stable.

Méthode directe (fonction de Lyapunov)

Théorème 2.3

- Si le point d'équilibre $x = 0$ admet une fonction de Lyapunov, alors il est stable.
- Si le point d'équilibre $x = 0$ admet une fonction de Lyapunov stricte, alors il est asymptotiquement stable.

Position du problème

Considérons un système dynamique de contrôle dont l'évolution est décrite par :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{7}$$

où $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est de classe C^1.
Le problème auquel on s'intéresse est de trouver un feedback $u = u(x)$ aussi régulier que possible tel que x^* (avec $x = 0$) soit un point d'équilibre asymptotiquement stable pour le système $\dot{x} = f(x, u(x))$.

Plan de cours

Stabilisation des systèmes linéaires

Considérons le système dynamique linéaire explicite suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{8}$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $B \in M_{n,m}(\mathbb{R})$. Le système (8) est dit stabilisable par un retour d'état linéaire (feedback) s'il existe une matrice $K \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ telle que le système

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) \tag{9}$$

soit asymptotiquement stable (c'est-à-dire que la matrice $A + BK$ est de Hurwitz).

Théorème 2.4

Si la paire (A, B) *satisfait la condition de Kalman* (c'est-à-dire rang$[B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B] = n$), *alors, pour tout polynôme réel unitaire* P *de degré* n, *il existe une matrice* $K \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ *telle que le polynôme caractéristique de* $A + BK$ *soit égal à* P.

Théorème 2.4

Si la paire (A, B) *satisfait la condition de Kalman* (c'est-à-dire $\text{rang}[B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B] = n$), *alors, pour tout polynôme réel unitaire* P *de degré* n*, il existe une matrice* $K \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ *telle que le polynôme caractéristique de* $A + BK$ *soit égal à* P*.*

Théorème 2.5

Si le système de contrôle (8) est contrôlable, alors il est stabilisable.

Système non contrôlable

Si le système de contrôle (8) n'est pas contrôlable, la condition de Kalman n'est pas satisfaite (i.e. $\mathrm{rang}[B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B] = n_1 < n$). Alors, il existe une matrice non singulière T telle que

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}, \quad TB = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

où $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $B \in M_{n,m}(\mathbb{R})$, et où le système associé à A_1 et B_1 est contrôlable. Les valeurs propres de A_3 sont alors appelées modes incontrôlables.

Théorème 2.6

Le système de contrôle (8) est stabilisable si et seulement si les modes incontrôlables sont stables, c'est-à-dire si toutes les valeurs propres de A_3 ont une partie réelle strictement négative.

Plan de cours

Conditions nécessaires de Brockett

Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(x(t), u), \\ x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m. \end{cases} \tag{10}$$

Si le système (10) admet un feedback stabilisateur de classe C^1 dans un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$, alors :

1. Le système linéarisé n'admet pas de modes incontrôlables associés à des valeurs propres strictement positives.

Conditions nécessaires de Brockett

Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(x(t), u), \\ x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m. \end{cases} \tag{10}$$

Si le système (10) admet un feedback stabilisateur de classe C^1 dans un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$, alors :

1. Le système linéarisé n'admet pas de modes incontrôlables associés à des valeurs propres strictement positives.
2. Il existe un voisinage V tel que, pour tout $x \in V$, il existe un contrôle $u_\lambda(\cdot)$, défini sur $[0, \infty[$, qui fait converger le système, partant de l'état $x = \lambda$ à $t = 0$, vers l'état $x = 0$ lorsque $t \to \infty$.

Conditions nécessaires de Brockett

Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(x(t), u), \\ x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m. \end{cases} \tag{10}$$

Si le système (10) admet un feedback stabilisateur de classe C^1 dans un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$, alors :

1. Le système linéarisé n'admet pas de modes incontrôlables associés à des valeurs propres strictement positives.
2. Il existe un voisinage V tel que, pour tout $x \in V$, il existe un contrôle $u_\lambda(\cdot)$, défini sur $[0, \infty[$, qui fait converger le système, partant de l'état $x = \lambda$ à $t = 0$, vers l'état $x = 0$ lorsque $t \to \infty$.
3. L'application $F(x, u)$ est surjective sur un voisinage de l'origine.

Approximation locale (linéarisation)

Considérons le système

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)). \tag{11}$$

L'approximation linéaire du système non linéaire (11) autour d'un point d'équilibre (x_e, u_e), pour lequel $f(x_e, u_e) = 0$, est donnée par :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{12}$$

où les matrices A et B sont définies par :

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_e, u_e), \qquad B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_e, u_e). \tag{13}$$

Approximation locale (linéarisation)

Théorème 2.7

Si le système (12) est stabilisable, alors le système (11) est localement stabilisable par le même feedback. De plus, il existe une matrice K telle que le contrôle $u = Kx$ stabilise localement le système non linéaire.

Fonction de Lyapunov contrôlée

Considérons le système non linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(x(t), u), \\ x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m. \end{cases} \tag{14}$$

Soit $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction positive définie. On dira que V est une fonction de Lyapunov contrôlée pour le système (14) si

$$\inf_{u \in \mathbb{R}^m} \langle \nabla V(x), F(x,u) \rangle < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \tag{15}$$

Si un système affine en contrôles admet une fonction de Lyapunov contrôlée, alors il est stabilisable par un feedback de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Système partiellement linéaire

Considérons le système partiellement linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(x(t), y), \\ \dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t). \end{cases} \tag{16}$$

où F est une fonction de classe C^∞ telle que $F(0,0) = 0$. Si le système

$$\dot{x}(t) = F(x(t), 0) \tag{17}$$

est localement asymptotiquement stable en un point d'équilibre de $\mathbb{R}^n$ et si le système linéaire

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t) \tag{18}$$

est localement stabilisable par un feedback linéaire $u(y) = Ky$, alors le système composite (16) est localement stabilisable par $u(y) = Ky$.