

Transfert de chaleur et de masse approfondi
1 ère année Master génie mécanique
Énergétique

Pr. S. Saouli
Département de génie mécanique
Institut des Sciences et de Technologies
Université Abdelhafid Boussouf, Mila

Rayonnement thermique

1. Introduction

Le transfert de chaleur s'effectue selon trois modes différents qui sont la conduction, la convection et le rayonnement thermique. Quand un gradient de température existe au sein d'un milieu immobile qui peut être un solide ou un fluide, nous utilisons le terme de conduction pour faire allusion au transfert de chaleur qui s'effectue à travers le milieu. Le terme de convection fait référence au mode de transfert de chaleur entre une surface solide et un fluide en mouvement ou entre deux fluides en mouvements quand un gradient de température existe. Le troisième mode de transfert de chaleur concerne le rayonnement thermique. Toute surface solide ou fluide émet un rayonnement thermique sous forme d'ondes électromagnétiques (lumière) qui voyage sans support matériel dans l'espace environnant.

La conduction est le processus par lequel la chaleur est transmise dans un système solide de sa région chaude vers sa région froide ou entre deux systèmes en contact (l'un chaud et l'autre froid). Ce transfert d'énergie se transmet par les vibrations des molécules du système autour de leurs positions d'équilibre. D'après la théorie cinétique, l'énergie ou la vitesse des molécules est proportionnelle à la température. Donc, en allant vers les régions de basses températures les molécules cèdent une partie de leurs énergies par des chocs élastiques ou par diffusion des électrons (cas des métaux).

La conduction tente à équilibrer la température au sein du système mais le processus continue si une différence de température est maintenue

$$\vec{q} = -\lambda S \vec{\nabla} T(M, t) \quad (\text{VI.1})$$

Lors du transfert de chaleur entre un fluide et un solide ou entre deux fluides, la quantité de chaleur échangée est donnée par la formule de Newton

$$Q = \bar{h}S (T_p - T_\infty) \quad (\text{VI.2})$$

où \bar{h} est le coefficient de transfert convectif moyen, T_p et T_∞ sont respectivement les températures de la surface et du fluide et S est la surface d'échange. Toute surface à la température T_p émet un rayonnement qu'on appelle rayonnement thermique pourvu que cette température soit différente du zéro absolu. Cette quantité de chaleur se calcul à partir de la formule

$$Q \propto T^4 \quad (\text{VI.3})$$

Si la surface à la température T_p est entourée d'un milieu infini de température T_∞ , la quantité de chaleur nette échangée est

$$Q \propto (T_p^4 - T_\infty^4) \quad (\text{VI.4})$$

2. Nature du rayonnement thermique

L'énergie du rayonnement thermique consiste d'ondes électromagnétiques ou de particules sans masse appelées photons. Dans la nature, aucun modèle de description de l'énergie du rayonnement n'est capable de décrire à lui seul tous les phénomènes observés. Les ondes électromagnétiques ou les photons se propagent dans n'importe quel milieu à la célérité c appelée célérité de la lumière. La célérité de la lumière dépend du milieu dans lequel elle se propage, elle est liée à la célérité dans le vide c_0 par la formule

$$c = \frac{c_0}{n} \quad (\text{VI.5})$$

où n est l'indice de réfraction du milieu et $c_0 = 2,998.10^8 \text{ ms}^{-1}$. Par définition l'indice de réfraction du vide est $n=1$. Pour les gaz

à la température ambiante, l'indice de réfraction est proche de l'unité, pour l'air, sa valeur est $n = 1,00029$ pour la lumière visible. La lumière se propage plus lentement dans les diélectriques, qui ont un indice de réfraction compris entre 1,4 et 4 et ne pénètre pratiquement pas dans les conducteurs. Toute onde électromagnétique est caractérisée soit par sa fréquence ν , sa fréquence angulaire ω , sa longueur d'onde λ ou son nombre d'onde η . Ces différentes grandeurs sont reliées par la relation

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{c}{\lambda} = c\eta \quad (\text{VI.6})$$

Si nous considérons l'aspect corpusculaire de la lumière, chaque photon transporte alors une énergie ε donnée par la relation

$$\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \quad (\text{VI.7})$$

où h est la constante de Planck dont la valeur est

$$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J.s} \quad (\text{VI.8})$$

La fréquence d'une onde électromagnétique ne change pas quand elle passe d'un milieu à un autre puisque l'énergie du photon doit être conservée, mais sa longueur d'onde change puisque l'indice de réfraction change d'un milieu à un autre. La figure suivante montre le spectre des ondes électromagnétiques. Notons que le rayonnement thermique est compris entre $\lambda = 0,1 \mu\text{m}$ et $\lambda = 100 \mu\text{m}$, il couvre ainsi la partie visible du spectre électromagnétique.

Quand une onde électromagnétique tombe sur une surface solide ou liquide, l'onde peut être réfléchiée partiellement ou totalement et la partie non-réfléchiée pénètre dans le milieu, et en traversant le milieu, l'onde continue à être atténuée. Si l'onde est complètement absorbée, le milieu est dit opaque. Si l'onde traverse le milieu sans atténuation, le milieu est considéré comme transparent ou semi-transparent si l'atténuation est partielle.

Une surface complètement opaque qui ne réfléchit aucune onde est appelée surface absorbante parfaite ou surface noire. Une surface qui ne réfléchit aucune radiation ne peut pas être vue, elle apparaît noire à nos yeux et de ce fait elle absorbe le maximum des radiations qui lui tombent dessus.

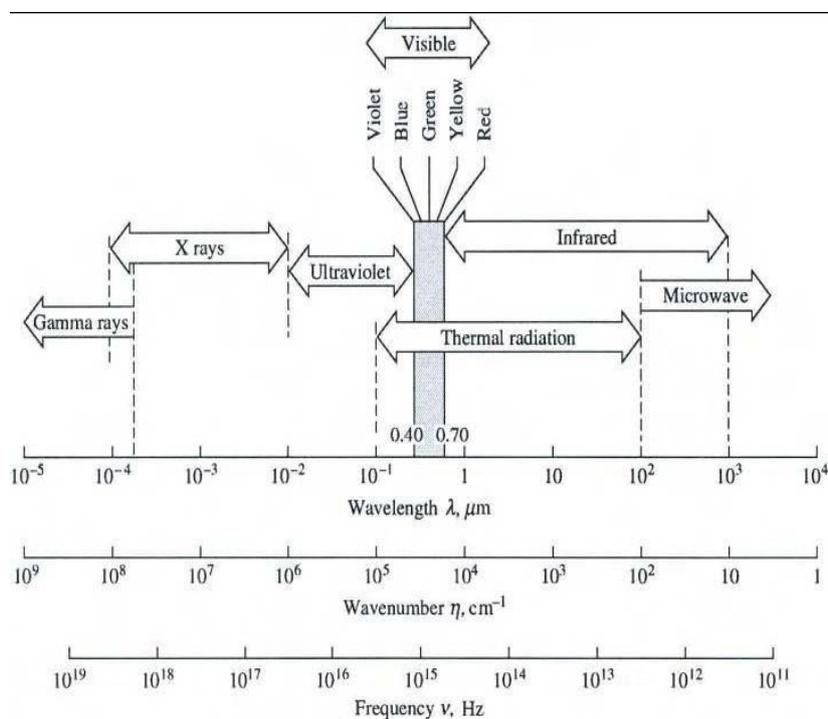


Figure VI. 1. Spectre des ondes électromagnétiques.

Considérons une enceinte dont la paroi interne est noire, thermiquement isolée à l'extérieur et contenant un petit objet noir. Avec le temps, en vertu du deuxième principe de la thermodynamique, l'enceinte et le petit objet atteignent la même température d'équilibre. Cela veut dire que chaque surface que ce

soit de l'enceinte ou du petit objet émette autant de radiation qu'elles en absorbent. Mais comme leurs surfaces sont noires, elles absorbent le maximum de radiation et par conséquent elles émettent aussi le maximum de radiation.

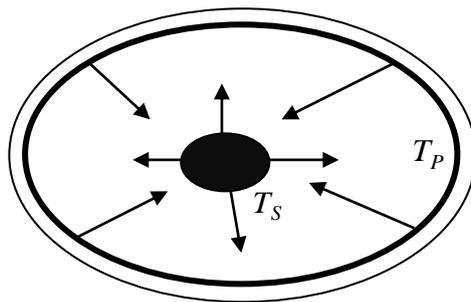


Figure VI. 2. Enceinte en équilibre avec un corps.

Lors de l'étude des interactions entre les radiations et les corps, nous faisons toujours intervenir la notion de corps noir. Ainsi, un corps noir est une surface qui absorbe et émet le maximum de radiation dans toutes les directions.

3. Lois fondamentales du rayonnement thermique

3. 1. Définitions

3. 1. 1. Angle solide

Par analogie avec l'angle formé par deux droites dans un plan, que l'on mesure en radians, par la longueur de l'arc intercepté sur le cercle de rayon unité. Nous mesurons un angle solide Ω en stéradians par l'aire de la surface interceptée par un cône de rayon unité. Un angle solide Ω est donc mesuré en stéradians par le rapport $\frac{S}{R^2}$ de la surface interceptée sur une sphère de rayon R au carré de ce rayon. En effet, l'angle solide Ω autour d'un point P situé sur un plan est

$$\Omega = \frac{S}{R^2} = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi \quad (\text{VI.9})$$

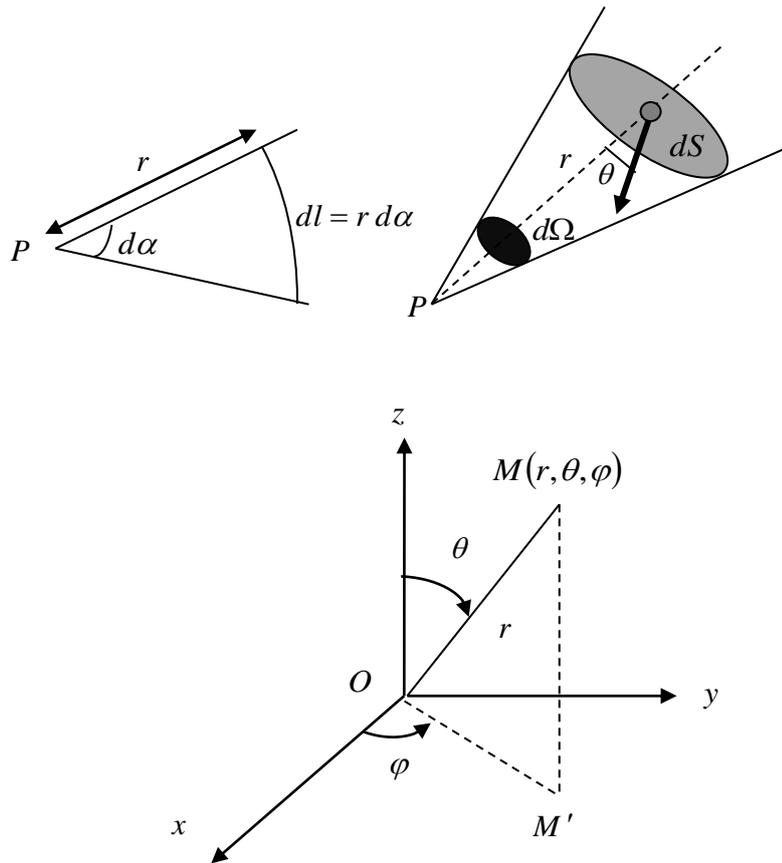


Figure VI. 3. Définitions de l'angle plan, l'angle solide et des coordonnées sphériques.

Un élément de surface dS suffisamment petit pour pouvoir être considéré comme plan, et tout entier situé à une distance r d'un point P , est vu de ce point P sous un angle solide $d\Omega$ tel que

$$d\Omega = \frac{dS \cos \alpha}{r^2} \quad (\text{VI.10})$$

ici α est l'angle du vecteur normal à l'élément de surface dS avec la direction joignant le point P au centre de l'élément de surface dS . En effet, si nous désignons par dS_p la projection de la surface dS sur la sphère de centre P , nous pouvons écrire

$$d\Omega = \frac{dS_p}{r^2} = \frac{dS \cos \alpha}{r^2} \quad (\text{VI.11})$$

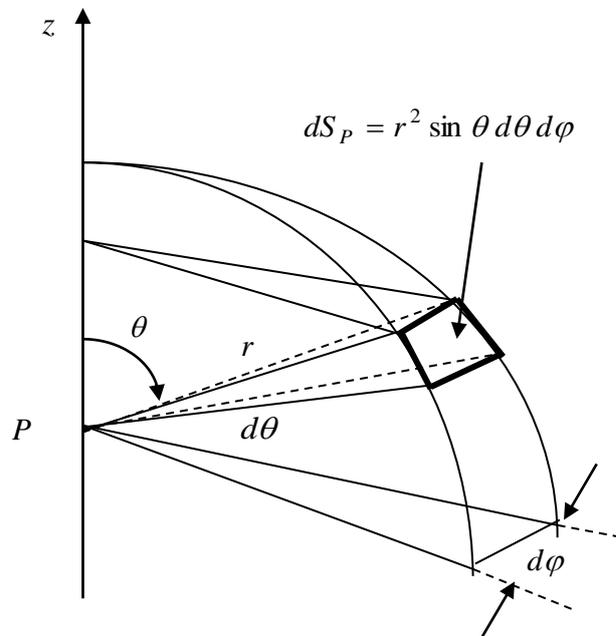


Figure VI. 4. Angle solide en coordonnées sphériques.

Si nous, nous remplaçons l'expression de la surface dS_p dans la définition de l'angle solide $d\Omega$, nous obtenons

$$d\Omega = \frac{r^2 \sin\theta d\theta d\varphi}{r^2} = \sin\theta d\theta d\varphi \quad (\text{VI.12})$$

L'angle solide sous lequel un hémisphère est vu est

$$\Omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta d\varphi = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta = 2\pi \quad (\text{VI.13})$$

3. 1. 2. Relation entre intensité radiative et émission de rayonnement

Considérons une émission dans une direction particulière d'une surface élémentaire dS_0 comme la montre la figure ci-dessous.

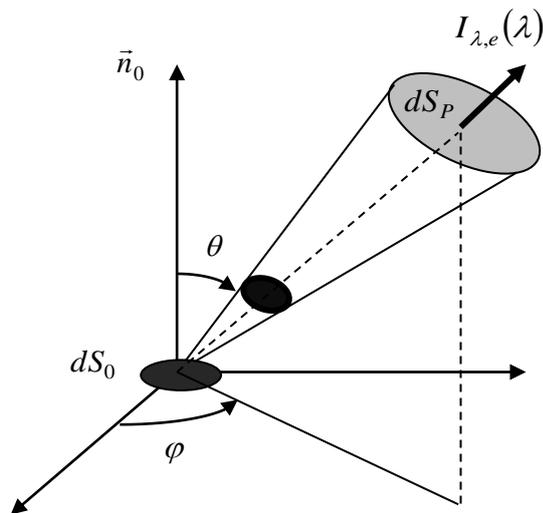


Figure VI. 5. Emission de rayonnement dans l'angle solide $d\Omega$.

Cherchons le taux avec lequel l'émission à partir de la surface dS_0 passe à travers la surface dS_p . Cette quantité peut être exprimée en termes d'intensité spectrale $I_{\lambda,e}$ du rayonnement émis. Formellement, nous définissons l'intensité spectrale $I_{\lambda,e}$ comme le

taux avec le quel l'énergie rayonnante est émise à la longueur d'onde λ dans la direction (φ, θ) par unité de surface de la surface émettrice normale à cette direction, par angle solide unité autour de cette direction et par intervalle unité de longueur d'onde $d\lambda$ autour de la longueur d'onde λ .

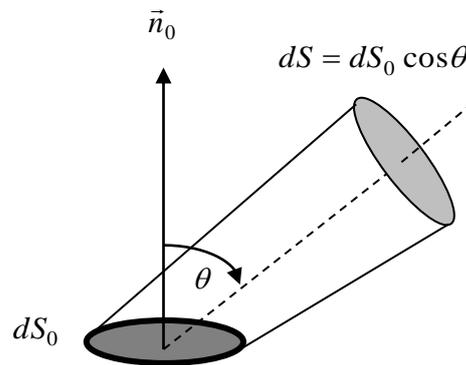


Figure VI. 6. Projection de la surface dS_0 dans la direction θ .

Mathématiquement, l'intensité $I_{\lambda,e}$ est

$$I_{\lambda,e}(\lambda, \theta, \varphi) = \frac{dq}{dS_0 \cos \theta d\Omega d\lambda} \quad (\text{VI.14})$$

où $dq_\lambda = \frac{dq}{d\lambda}$ est le taux avec le quel le rayonnement à la longueur d'onde λ quitte la surface dS_0 et passe à travers la surface dS . Notons que l'unité de l'intensité spectrale $I_{\lambda,e}$ est $W/m^2 \text{sr} \mu\text{m}$. L'équation VI. 14 peut être réécrite sous la forme

$$dq_\lambda = I_{\lambda,e}(\lambda, \theta, \varphi) dS_0 \cos \theta d\Omega \quad (\text{VI.15})$$

Cette relation nous permet de calculer le taux avec le quel le rayonnement émis par une surface se propage dans une région de

l'espace définie par l'angle solide $d\Omega$ autour de la direction (θ, φ) . Mais pour calculer ce taux, il faut connaître l'intensité spectrale $I_{\lambda,e}(\lambda, \theta, \varphi)$ du rayonnement émis. Introduisons une nouvelle grandeur dq'_λ définie comme le flux spectral du rayonnement associé à la surface émettrice dS_0 , en effet, nous pouvons écrire

$$dq'_\lambda = \frac{dq_\lambda}{dS_0} \quad (\text{VI.16})$$

de la relation VI. 15, nous avons

$$dq'_\lambda = I_{\lambda,e}(\lambda, \theta, \varphi) \cos\theta d\Omega \quad (\text{VI.17})$$

en utilisons la relation VI. 12, nous obtenons

$$dq'_\lambda = I_{\lambda,e}(\lambda, \theta, \varphi) \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi \quad (\text{VI.18})$$

3. 1. 3. Pouvoir émissif

Le pouvoir émissif hémisphérique E_λ est défini comme le taux avec le quel le rayonnement de longueur d'onde λ est émis dans toutes les directions d'une surface par unité d'intervalle de longueur d'onde autour de λ et par unité de surface. Par conséquent, le pouvoir émissif hémisphérique E_λ est le flux de chaleur spectral associé à l'émission dans un hémisphère hypothétique autour de la surface dS_0 . Ce pouvoir émissif hémisphérique est donné par la relation

$$E_\lambda(\lambda) = q'_\lambda(\lambda) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} I_{\lambda,e}(\lambda, \theta, \varphi) \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi \quad (\text{VI.19})$$

Notons que le pouvoir émissif hémisphérique E_λ est associé à la surface dS_0 , par contre l'intensité $I_{\lambda,e}(\lambda, \theta, \varphi)$ est associée à la surface projetée $dS = dS_0 \cos\theta$. Le pouvoir émissif hémisphérique

total E est le taux avec lequel le rayonnement est émis par unité de surface dans toutes les directions et avec toutes les longueurs d'onde possible. Par conséquent, nous devons avoir

$$E = \int_0^{\infty} E_{\lambda}(\lambda) d\lambda \quad (\text{VI.20})$$

ou bien

$$E = \int_0^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} I_{\lambda,e}(\lambda, \theta, \varphi) \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi d\lambda \quad (\text{VI.21})$$

Le terme pouvoir émissif implique que l'émission du rayonnement est dans toutes les directions, il est possible dans ce cas d'oublier le mot hémisphérique. Dorénavant, nous utilisons tout simplement les termes pouvoir émissif spectral et pouvoir émissif total. Généralement, la distribution directionnelle de l'émission du rayonnement dépend de la nature de la surface émettrice, mais il existe un cas spécial qui est le cas d'une surface émettrice dite diffuse. Ainsi, pour une surface émettrice diffuse, l'intensité du rayonnement émis $I_{\lambda,e}(\lambda, \theta, \varphi)$ ne dépend pas de la direction, c'est-à-dire que $I_{\lambda,e}(\lambda, \theta, \varphi) = I_{\lambda,e}(\lambda)$. Dans ce cas, l'équation VI. 21 s'écrit

$$E_{\lambda}(\lambda) = I_{\lambda,e}(\lambda) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi = \pi I_{\lambda,e}(\lambda) \quad (\text{VI.22})$$

Il en est de même pour le pouvoir émissif total, à partir de l'équation VI. 20, nous obtenons aussi

$$E = \pi I_e \quad (\text{VI.23})$$

3. 1. 4. Irradiation

Après avoir considéré le rayonnement émis par une surface, intéressons-nous maintenant au rayonnement incident sur une surface quelconque. Ce rayonnement incident peut provenir d'émission et de réflexion d'autres surfaces et aura une distribution spectrale et directionnelle déterminé par l'intensité spectrale $I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \varphi)$. Cette quantité est définie comme le taux avec lequel une énergie rayonnante de longueur d'onde tombe dans la direction (θ, φ) par unité de surface réceptrice normale à sa direction par angle solide unité $d\Omega$ autour de cette direction et par unité d'intervalle de longueur $d\lambda$ d'onde autour de la longueur d'onde λ .

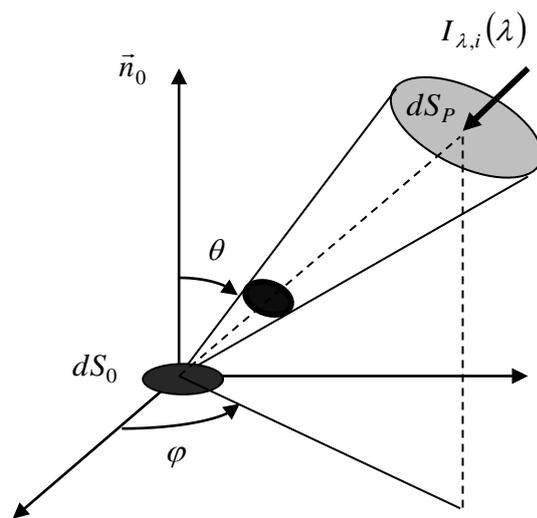


Figure VI. 7. Direction du rayonnement incident.

L'intensité spectrale du rayonnement incident $I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \varphi)$ peut être reliée à un nouveau flux radiatif appelé irradiation qui englobe tous les rayonnements incidents de toutes les directions. L'irradiation spectrale $G_{\lambda}(\lambda, \theta, \varphi)$ définit le taux de rayonnement de longueur

d'onde λ incident sur l'unité de surface par unité d'intervalle de longueur d'onde $d\lambda$ autour de la longueur d'onde λ . Par conséquent, l'irradiation $G_\lambda(\lambda, \theta, \varphi)$ est définie par la relation

$$G_\lambda(\lambda) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \varphi) \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi \quad (\text{VI.24})$$

Si nous considérons l'irradiation totale G qui est le taux de rayonnement incident sur une surface, venant de toutes les directions et englobant toutes les longueurs d'onde, nous pouvons écrire alors

$$G = \int_0^\infty G_\lambda(\lambda) d\lambda \quad (\text{VI.25})$$

en tenant compte de la relation VI. 24, nous obtenons

$$G = \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} I_{\lambda,e}(\lambda, \theta, \varphi) \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi d\lambda \quad (\text{VI.26})$$

Si le rayonnement incident est diffus, l'intensité $I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \varphi)$ sera indépendante de la direction et par conséquent, nous obtenons

$$G_\lambda(\lambda) = \pi I_{\lambda,i}(\lambda) \quad (\text{VI.27})$$

et

$$G = \pi I_i \quad (\text{VI.28})$$

3. 1. 5. Radiosité

La radiosité englobe tous les rayonnements émis par une surface. Ce rayonnement tient compte du rayonnement réfléchi par la

surface en plus du rayonnement directement émis par cette même surface.

La radiosité spectrale $J_\lambda(\lambda, \theta, \varphi)$ représente le taux avec lequel l'énergie rayonnante de longueur d'onde quitte dans la direction (θ, φ) une surface unité par unité d'intervalle de longueur $d\lambda$ d'onde autour de la longueur d'onde λ .

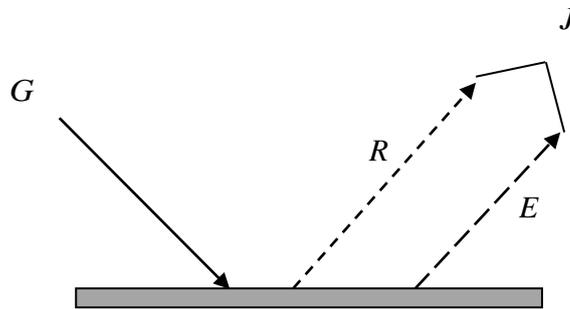


Figure VI. 8. Radiosité d'une surface.

Si nous désignons par $I_{\lambda, e+r}(\lambda, \theta, \varphi)$ l'intensité spectrale du rayonnement émis plus le rayonnement réfléchi par la surface, nous pouvons écrire alors

$$J_\lambda(\lambda) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} I_{\lambda, e+r}(\lambda, \theta, \varphi) \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi \quad (\text{VI.29})$$

la radiosité totale J est

$$J = \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} I_{\lambda, e+r}(\lambda, \theta, \varphi) \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi d\lambda \quad (\text{VI.30})$$

Si la surface est un émetteur diffus et un réflecteur diffus, nous pouvons écrire que

$$J_{\lambda}(\lambda) = \pi I_{\lambda, e+r}(\lambda) \quad (\text{VI.31})$$

et

$$J = \pi I_{e+r} \quad (\text{VI.32})$$

4. Équations de Maxwell et ondes électromagnétiques

4. 1. Équations de Maxwell

Les équations de Maxwell sont déduites des quatre lois suivantes

- a) La loi de Gauss : le flux du champ électrique à travers une surface fermée est égal à la charge électrique totale englobée divisée par la permittivité du vide.
- b) L'inexistence de monopôles magnétiques fait que le flux du champ magnétique, à travers n'importe quelle surface fermée, est nul.
- c) Loi de Faraday-Henry : la force électromotrice générée autour d'un circuit fermé est égale à moins la variation dans le temps du flux du champ magnétique à travers le circuit fermé.
- d) Loi d'Ampère-Maxwell : la circulation du champ magnétique autour d'un circuit fermé est proportionnelle à la somme de tous les courants qui traverse le circuit.

Considérons deux charges électriques q_1 et q_2 localisées dans l'espace aux points P_1 et P_2 . En vertu de la loi de Coulomb, la force F_{12} qui agit sur la charge électrique q_2 est

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \quad (\text{VI.33})$$

où \vec{r}_1 et \vec{r}_2 sont les vecteurs positions des points P_1 et P_2 par rapport à un repère cartésien dans l'espace, et ε_0 est la permittivité du vide.

Si nous considérons N charges électriques q_1, \dots, q_N localisées dans l'espace aux points P_1, \dots, P_N de vecteurs positions $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$, la force \vec{F} qui agit sur une charge électrique test q de vecteur position \vec{r} est

$$\vec{F} = q \sum_{i=1}^{i=N} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \quad (\text{VI.34})$$

Introduisons un champ vectoriel $\vec{E}(\vec{r})$ appelé champ électrique, tel que la force qui agit sur la charge électrique test q s'écrit

$$\vec{F} = q\vec{E}(\vec{r}) \quad (\text{VI.35})$$

dans ce cas, le champ électrique $\vec{E}(\vec{r})$ s'écrit

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{i=N} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \quad (\text{VI.36})$$

Pour une charge électrique singulière, le champ électrique est

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (\text{VI.37})$$

Supposons maintenant qu'au lieu d'avoir des charges électriques discrètes, nous avons une certaine distribution continue de charge électrique représentée par la densité de charge volumique $\rho(\vec{r})$. La charge électrique à un point P de vecteur position \vec{r}' est $\rho(\vec{r}')dV$ où dV est l'élément de volume autour du point P . Le champ électrique créé par cette distribution de charge s'écrit

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV \quad (\text{VI.38})$$

Considérons une charge électrique q placée à l'origine. Le champ électrique créé par cette charge est radial et a une symétrie sphérique autour de l'origine. Si nous prenons une sphère de rayon r autour de la charge électrique, le flux du champ électrique $\vec{E}(\vec{r})$ à travers la surface de la sphère est

$$\int_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \int_S E_r dS = E_r 4\pi r^2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (\text{VI.39})$$

À partir du théorème d'Ostrogradski, nous avons

$$\int_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) dV \quad (\text{VI.40})$$

d'où

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) dV = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (\text{VI.41})$$

où $\vec{\nabla}$ est l'opérateur nabla. Si au lieu d'avoir une charge électrique q , nous avons une densité de charge volumique $\rho(\vec{r})$, la formule VI.41 s'écrit

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) dV \quad (\text{VI.42})$$

soit

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0} \quad (\text{VI.43})$$

Les lignes du champ magnétiques $\vec{B}(\vec{r}, t)$ sont toujours des lignes fermées du fait qu'ils n'existent pas de monopôles magnétiques. Par conséquent, le flux du champ magnétique à travers n'importe

quelle surface traversée par les lignes du champ magnétique est nul, d'où

$$\int_S \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} = -\int_S \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n}_1 dS + \int_S \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n}_1 dS = 0 \quad (\text{VI.44})$$

En utilisant le théorème d'Ostrogradski, nous avons

$$\int_S \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) dV \quad (\text{VI.45})$$

d'où

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad (\text{VI.46})$$

D'après la loi de Faraday-Henry, la force électromotrice $V(t)$ est

$$V(t) = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} \quad (\text{VI.47})$$

Mais nous savons que la force électromotrice générée autour du circuit fermé est la circulation du champ électrique autour de ce circuit

$$V(t) = \int_C \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} \quad (\text{VI.48})$$

En éliminant la force électromotrice entre les relations VI. 47 et VI. 48, nous obtenons

$$\int_C \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} \quad (\text{VI.49})$$

Si nous utilisons le théorème de Stokes

$$\int_C \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} \quad (\text{VI.50})$$

l'équation VI. 49 s'écrit

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} \quad (\text{VI.51})$$

d'où

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (\text{VI.52})$$

D'après la loi d'Ampère-Maxwell, la circulation du champ magnétique est

$$\int_C \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} = \mu_0 I(t) \quad (\text{VI.53})$$

où μ_0 est la perméabilité du vide et $I(t)$ est la somme de tous les courants qui traversent le circuit. Le courant électrique I peut être écrit sous la forme

$$I(t) = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \varepsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (\text{VI.54})$$

En combinant, ces deux équations, nous obtenons

$$\int_C \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \varepsilon_0 \mu_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (\text{VI.55})$$

avec le théorème de Stokes, cette relation s'écrit

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (\text{VI.56})$$

Maintenant, résumons les équations de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\varepsilon_0} \quad (\text{VI.57})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad (\text{VI.58})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (\text{VI.59})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (\text{VI.60})$$

Si nous nous plaçons dans le vides où $\rho(\vec{r}, t) = 0$ et $\vec{j} = 0$, les équations de Maxwell deviennent

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 0 \quad (\text{VI.61})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad (\text{VI.62})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (\text{VI.63})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (\text{VI.64})$$

Si nous faisons le produit vectoriel de l'opérateur nabra $\vec{\nabla}$ par l'équation VI. 63, nous obtenons

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t)) = -\frac{\partial (\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t))}{\partial t} \quad (\text{VI.65})$$

À partir de l'identité vectorielle

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t)) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t)) - \Delta \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (\text{VI.66})$$

l'équation VI. 65 s'écrit

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t)) - \Delta \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial (\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t))}{\partial t} \quad (\text{VI.67})$$

mais comme $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 0$, nous obtenons

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\partial (\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t))}{\partial t} \quad (\text{VI.68})$$

en y rapportant la relation VI. 64, il vient

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad (\text{VI.69})$$

Avec la même procédure, nous obtenons une équation similaire pour le champ magnétique

$$\Delta \vec{B}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad (\text{VI.70})$$

Si nous écrivons l'équation VI. 69 sous la forme

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad (\text{VI.71})$$

Équation ayant la forme d'une équation d'onde

$$\Delta f(\vec{r}, t) = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 f(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad (\text{VI.72})$$

équation différentielle qui décrit la propagation de la grandeur $f(\vec{r}, t)$ comme une onde avec la vitesse C . Ainsi, les champs électrique et magnétique qui obéissent aux équations VI. 69 et VI. 70 se propagent comme des ondes avec la vitesse

$$c_0 = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}} \quad (\text{VI.73})$$

Si nous prenons les valeurs numériques de $\varepsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} C^2 N^{-1} m^{-2}$ et $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} NA^2$, nous obtenons pour la vitesse c_0 la valeur

$$c_0 = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}} = 2,998 \cdot 10^8 ms^{-1} \quad (\text{VI.74})$$

qui n'est rien d'autre que la vitesse de la lumière dans le vide. Cette analogie poussa Maxwell à supposer que la lumière est la propagation de deux ondes formées, l'une par un champ électrique et l'autre par un champ magnétique, c'est ce que nous appelons une onde électromagnétique

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad (\text{VI.75})$$

$$\Delta \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad (\text{VI.76})$$

Les ondes électromagnétiques monochromatiques dites planes sont décrites par les expressions suivantes

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{M} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (\text{VI.77})$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{N} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (\text{VI.78})$$

où $\omega = 2\pi\nu$ et $|\vec{k}| = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ sont respectivement la fréquence angulaire et le module du vecteur d'onde \vec{k} . Ecrivons ces équations sous la forme

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{M} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} e^{-i\omega t} \quad (\text{VI.79})$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{N} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} e^{-i\omega t} \quad (\text{VI.80})$$

En posons que $\vec{E}_0(\vec{r}) = \vec{M} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$ et $\vec{B}_0(\vec{r}) = \vec{N} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$, nous pouvons alors décrire une onde électromagnétique monochromatique plane par les relations

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{r}) e^{-i\omega t} \quad (\text{VI.81})$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0(\vec{r}) e^{-i\omega t} \quad (\text{VI.82})$$

En substituant ces expressions dans les équations VI. 69 et VI. 70, nous obtenons

$$\Delta(\vec{E}_0(\vec{r})e^{-i\omega t}) = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2(\vec{E}_0(\vec{r})e^{-i\omega t})}{\partial t^2} \quad (\text{VI.83})$$

$$\Delta(\vec{B}_0(\vec{r})e^{-i\omega t}) = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2(\vec{B}_0(\vec{r})e^{-i\omega t})}{\partial t^2} \quad (\text{VI.84})$$

soient

$$\Delta\vec{E}_0(\vec{r})e^{-i\omega t} = -\frac{\omega^2}{c_0^2} \vec{E}_0(\vec{r})e^{-i\omega t} \quad (\text{VI.85})$$

$$\Delta\vec{B}_0(\vec{r})e^{-i\omega t} = -\frac{\omega^2}{c_0^2} \vec{B}_0(\vec{r})e^{-i\omega t} \quad (\text{VI.86})$$

et en simplifiant par $e^{-i\omega t}$, nous arrivons aux équations

$$\Delta\vec{E}_0(\vec{r}) + \frac{\omega^2}{c_0^2} \vec{E}_0(\vec{r}) = 0 \quad (\text{VI.87})$$

$$\Delta\vec{B}_0(\vec{r}) + \frac{\omega^2}{c_0^2} \vec{B}_0(\vec{r}) = 0 \quad (\text{VI.88})$$

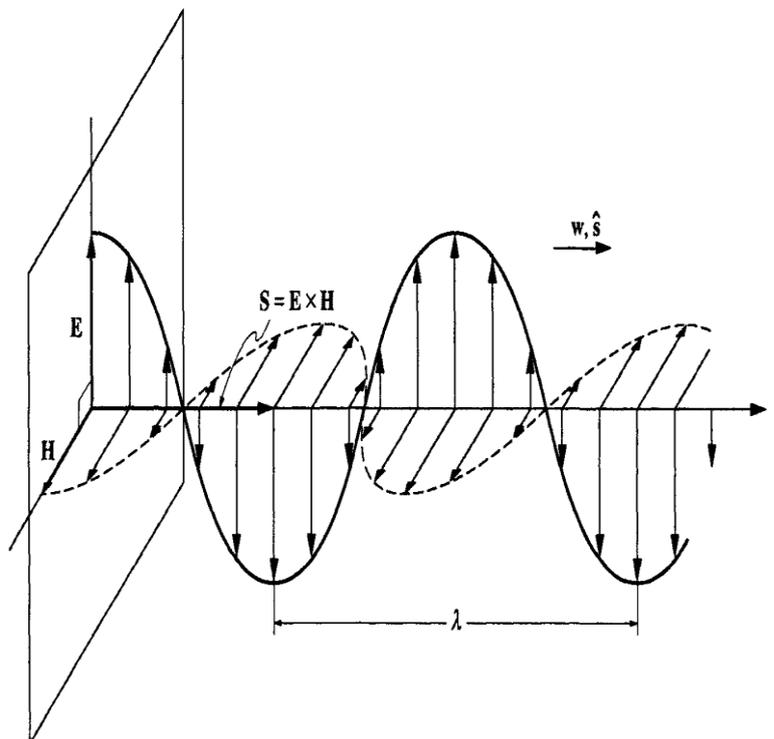


Figure VI. 9. Onde électromagnétique plane.

Reprenons l'équation $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{M}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$ et en calculant $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t)$, nous obtenons

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{M}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}) = i\vec{k} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (\text{VI.89})$$

de même pour $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t)$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{N}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}) = i\vec{k} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) \quad (\text{VI.90})$$

A partir des deux premières équations de Maxwell, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 0$ et $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0$, nous déduisons que

$$\vec{k} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 0 \quad (\text{VI.91})$$

$$\vec{k} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad (\text{VI.92})$$

Ces deux relations montrent que le vecteur d'onde \vec{k} est perpendiculaire au vecteur champ électrique $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et au vecteur champ magnétique $\vec{B}(\vec{r}, t)$ et par conséquent, les champs électrique $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et magnétique $\vec{B}(\vec{r}, t)$ sont aussi perpendiculaires entre eux.

4. 2. Ondes électromagnétiques stationnaires dans une cavité

Considérons une enceinte métallique de côtés L_1 , L_2 et L_3 à la température T . Chaque paroi émet des radiations électromagnétiques (rayonnement thermique) qui se réfléchissent sur les autres parois et forment un ensemble d'ondes électromagnétiques stationnaires. Les champs électriques des ondes électromagnétiques stationnaires dans cette enceinte dans les directions Ox , Oy et Oz sont

$$E_x(x, y, z, t) = E_{0x} \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z \sin 2\pi\nu t \quad (\text{VI.93})$$

$$E_y(x, y, z, t) = E_{0y} \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z \sin 2\pi \nu t \quad (\text{VI.94})$$

$$E_z(x, y, z, t) = E_{0z} \sin k_x x \sin k_y y \cos k_z z \sin 2\pi \nu t \quad (\text{VI.95})$$

où E_{0x} , E_{0y} et E_{0z} sont les amplitudes du champ électrique dans les directions Ox , Oy et Oz , et k_x , k_y et k_z sont les projections du vecteur nombre d'onde \vec{k} .

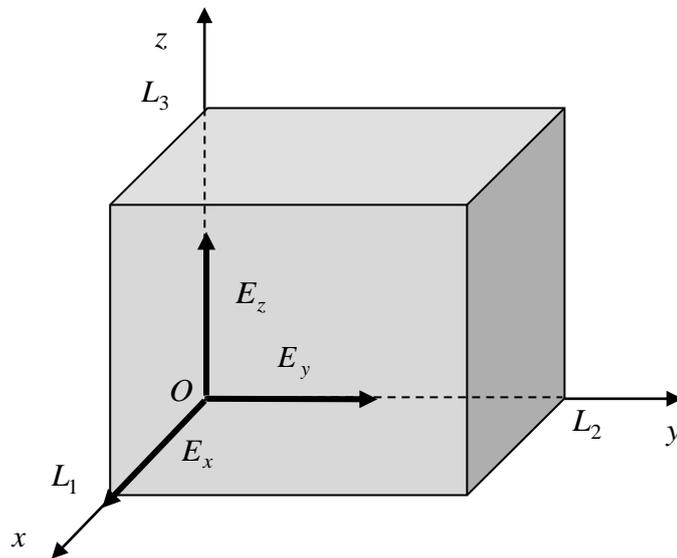


Figure VI. 10. Cavité contenant des ondes électromagnétiques.

Si nous considérons l'onde selon l'axe Ox par exemple, nous remarquons, que l'onde a une amplitude sinusoïdale $E_{0x} \sin k_x x$ qui oscille dans le temps comme un oscillateur harmonique avec une fréquence ν . Sur les parois de la cavité, les conditions aux limites sont telles que les composantes du champ tangentielles aux parois s'annulent.

Pour les parois perpendiculaires à l'axe Ox , les composantes tangentielles du champ électrique sont $E_y(x, y, z, t)$ et $E_z(x, y, z, t)$. En effet, nous pouvons écrire

$$E_y(0, y, z, t) = E_{0y} \sin k_x 0 \cos k_y y \sin k_z z \sin 2\pi \nu t = 0 \quad (\text{VI.96})$$

$$E_y(L_1, y, z, t) = E_{0y} \sin k_x L_1 \cos k_y y \sin k_z z \sin 2\pi \nu t = 0 \quad (\text{VI.97})$$

$$E_z(0, y, z, t) = E_{0z} \sin k_x 0 \sin k_y y \cos k_z z \sin 2\pi \nu t = 0 \quad (\text{VI.98})$$

$$E_z(L_1, y, z, t) = E_{0z} \sin k_x L_1 \sin k_y y \cos k_z z \sin 2\pi \nu t = 0 \quad (\text{VI.99})$$

Nous remarquons que pour $x = 0$, les champs $E_y(x, y, z, t)$ et $E_z(x, y, z, t)$ s'annulent, c'est le premier nœud, un deuxième nœud aussi existe pour $x = L_1$ si la condition suivante est satisfaite

$$k_x L_1 = n_x \pi \quad (\text{VI.100})$$

Nous pouvons écrire les mêmes conditions pour les deux faces perpendiculaires à l'axe Oy , à savoir

$$E_x(x, 0, z, t) = E_{0x} \cos k_x x \sin k_y 0 \sin k_z z \sin 2\pi \nu t = 0 \quad (\text{VI.101})$$

$$E_x(x, L_2, z, t) = E_{0x} \cos k_x x \sin k_y L_2 \sin k_z z \sin 2\pi \nu t = 0 \quad (\text{VI.102})$$

$$E_z(x, 0, z, t) = E_{0z} \sin k_x x \sin k_y 0 \cos k_z z \sin 2\pi \nu t = 0 \quad (\text{VI.103})$$

$$E_z(x, L_2, z, t) = E_{0z} \sin k_x x \sin k_y L_2 \cos k_z z \sin 2\pi \nu t = 0 \quad (\text{VI.104})$$

Nous déduisons le deuxième nœud à partir de la condition

$$k_y L_2 = n_y \pi \quad (\text{VI.105})$$

Pour les faces perpendiculaires à l'axe Oz , nous écrivons

$$E_x(x, y, 0, t) = E_{0x} \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z 0 \sin 2\pi \nu t = 0 \quad (\text{VI.106})$$

$$E_x(x, y, L_3, t) = E_{0x} \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z L_3 \sin 2\pi \nu t = 0 \quad (\text{VI.107})$$

$$E_y(x, y, 0, t) = E_{0y} \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z 0 \sin 2\pi \nu t = 0 \quad (\text{VI.108})$$

$$E_y(x, y, L_3, t) = E_{0y} \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z L_3 \sin 2\pi \nu t = 0 \quad (\text{VI.109})$$

Nous déduisons le deuxième nœud à partir de la condition

$$k_z L_3 = n_z \pi \quad (\text{VI.110})$$

En résumé, nous avons obtenus trois conditions pour avoir des ondes électromagnétiques stationnaires dans une cavité, ces conditions sont

$$k_x = \frac{n_x \pi}{L_1}, \quad k_y = \frac{n_y \pi}{L_2}, \quad k_z = \frac{n_z \pi}{L_3} \quad (\text{VI.111})$$

où n_x , n_y et n_z sont des nombres entiers positifs allant de zéro jusqu'à l'infini. Si nous considérons la composante $E_x(x, y, z, t)$ du champ électrique, elle doit impérativement vérifier l'équation

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_x(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x(x, y, z, t)}{\partial z^2} \\ = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 E_x(x, y, z, t)}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (\text{VI.112})$$

en y substituant l'équation VI. 93, nous obtenons

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} \quad (\text{VI.113})$$

À partir des relations VI. 111, nous arrivons à

$$\left(\frac{n_x \pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{n_y \pi}{L_2} \right)^2 + \left(\frac{n_z \pi}{L_3} \right)^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} \quad (\text{VI.114})$$

Considérons que la cavité est cubique de côté L , et remplaçons la fréquence angulaire ω par la fréquence ν , l'équation VI. 114 devient alors

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = \frac{4L^2\nu^2}{c_0^2} \quad (\text{VI.115})$$

Comme les nombres n_x , n_y et n_z prennent des valeurs allant de zéro à l'infinie, ils définissent une infinité d'ondes stationnaires dans la cavité. Remarquons, que si nous considérons un repère défini par les nombres n_x , n_y et n_z , l'équation VI. 115 est l'équation d'une sphère de rayon $\frac{2L\nu}{c_0}$. Nous pouvons considérer que les variations des nombres n_x , n_y et n_z est continue et dans ce cas, le nombre de modes d'oscillations N_ν sera défini par la relation

$$N_\nu = \frac{1}{8} \frac{4\pi}{3} \left(\frac{2L\nu}{c_0} \right)^3 \quad (\text{VI.116})$$

Le nombre de modes d'oscillations n_ν par unité de volume et par intervalle de fréquence est

$$n_\nu = \frac{1}{V} \frac{dN_\nu}{d\nu} \quad (\text{VI.117})$$

Si nous utilisons la relation $N_\nu = \frac{4\pi L^3 \nu^3}{3c_0^3}$, nous obtenons

$$n_\nu = \frac{1}{L^3} \frac{d\left(\frac{4\pi L^3 \nu^3}{3c_0^3}\right)}{d\nu} = \frac{4\pi \nu^2}{c_0^3} \quad (\text{VI.118})$$

La densité d'énergie électromagnétique u_ν contenue dans le volume de la cavité est

$$u_\nu = 2n_\nu \bar{E} \quad (\text{VI.119})$$

où \bar{E} est l'énergie moyenne de chaque oscillateur contenu dans la cavité, le facteur 2 vient de la polarisation du champ électrique. En injectant la relation dans l'équation VI. 118, nous obtenons alors

$$u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c_0^3} \bar{E} \quad (\text{VI.120})$$

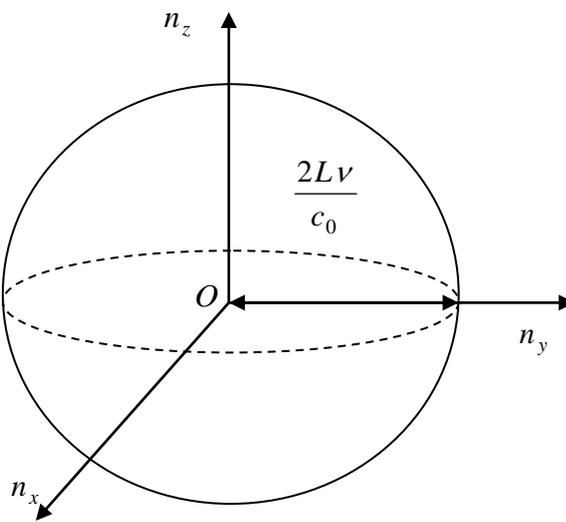


Figure VI. 11. Système de coordonnées n_x , n_y et n_z .

5. Rayonnement d'un corps noir, loi de Planck

5. 1. Notion de corps noir

Un corps noir possède les caractéristiques suivantes :

- a) Il absorbe tout le rayonnement incident indépendamment de la longueur d'onde et de la direction du rayonnement.
- b) Pour une température et une longueur d'onde données, aucune ne peut émettre une énergie rayonnante supérieure à celle émise par un corps noir.

- c) Bien que le rayonnement émis par un corps noir soit fonction de la température et de la longueur d'onde, il est indépendant de la direction. Ainsi, le corps noir est un émetteur diffus.

Étant un émetteur et un absorbeur parfait, le corps noir sert comme référence standard de comparaison des propriétés radiatives des surfaces sujettes à l'étude.

Malgré, il est commun d'admettre que certaines surfaces s'approchent d'un corps, aucune surface ne possède ses propriétés spécifiques. L'approche la plus admissible d'un corps noir est une cavité dont la surface interne est maintenue à une température uniforme. Si un rayonnement entre dans la cavité par une petite ouverture, il subira une multitude de réflexions sur la surface interne avant de sortir par la même ouverture, dans ce cas, le rayonnement est presque totalement absorbé et nous réalisons un corps noir. Du point de vue thermodynamique, il est possible d'admettre que le rayonnement qui quitte la cavité ne dépendra que de la température de la paroi interne et correspond au rayonnement d'un corps noir.

Comme l'émission du rayonnement d'un corps noir est diffuse, l'intensité spectrale $I_{\lambda,b}$ émise est sûrement indépendante de la direction. Le rayonnement cumulé dans la cavité résulte des émissions et réflexions de la paroi interne de la cavité, il doit être de la même nature que le rayonnement sortant par l'ouverture et par conséquent, le rayonnement dans la cavité est aussi un rayonnement de corps noir. Ainsi, pour n'importe quelle portion de la paroi interne de la cavité, nous avons toujours $G_{\lambda}(\lambda, T) = E_{\lambda,b}(\lambda, T)$.

5. 2. Loi de Planck

Nous avons obtenu la densité d'énergie contenue dans le volume d'une cavité contenant un rayonnement électromagnétique, cette densité d'énergie est donnée par la formule

$$u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c_0^3} \bar{E} \quad (\text{VI.121})$$

De la thermodynamique statistique, nous savons que la probabilité de trouver un système N_i à l'état d'énergie E_i est donnée par la ce que nous appelons la distribution de Boltzmann

$$P = A e^{-\frac{E_i}{kT}} \quad (\text{VI.122})$$

où k est la constante de Boltzmann et E_i est la température absolue du système. Par conséquent, l'énergie moyenne \bar{E} d'un tel système est

$$\bar{E}_i = \frac{\int_0^\infty E_i e^{-\frac{E_i}{kT}} dE_i}{\int_0^\infty e^{-\frac{E_i}{kT}} dE_i} \quad (\text{VI.123})$$

L'hypothèse de Planck est que l'énergie échangée entre les oscillateurs sur la paroi de la cavité d'un corps noir et les ondes électromagnétiques stationnaires qui s'y trouvent se fait par paquets d'énergie discrets appelés quantas donnés par la formule

$$E_n = nh\nu \quad (\text{VI.124})$$

où n est un nombre entier.

Calculons à présent, l'énergie moyenne \bar{E} des oscillateurs se trouvant sur la paroi de la cavité qui constitue le corps noir. Cette énergie moyenne \bar{E} est donnée par la formule où nous avons remplacé l'intégrale par une sommation puisque les énergies E_n sont échangées par paquets discrets $E_n = nh\nu$

$$\bar{E} = \frac{\sum_{n=0}^{n=\infty} nh\nu e^{-\frac{nh\nu}{kT}}}{\sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-\frac{nh\nu}{kT}}} \quad (\text{VI.125})$$

Si nous posons que $x = \frac{h\nu}{kT}$, la formule précédente s'écrit alors sous la forme

$$\bar{E} = kT \frac{\sum_{n=0}^{n=\infty} nx e^{-nx}}{\sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-nx}} = kT \frac{N(x)}{D(x)} \quad (\text{VI.126})$$

où les fonctions $N(x)$ et $D(x)$ sont définies par les expressions suivante

$$N(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} nx e^{-nx} \quad (\text{VI.127})$$

$$D(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-nx} \quad (\text{VI.128})$$

Si nous explicitons la fonction $D(x)$

$$D(x) = 1 + e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \dots + e^{-nx} \quad (\text{VI.129})$$

nous remarquons qu'elle représente une suite géométrique de raison e^{-x} , par conséquent, nous pouvons écrire la fonction $D(x)$ sous la forme

$$D(x) = \frac{1}{1 - e^{-x}} \quad (\text{VI.130})$$

Explicitement, la fonction $N(x)$ s'écrit

$$N(x) = xe^{-x} + 2xe^{-2x} + 3xe^{-3x} + \dots + nxe^{-nx} \quad (\text{VI.131})$$

ou encore

$$N(x) = x(e^{-x} + 2e^{-2x} + 3e^{-3x} + \dots + ne^{-nx}) \quad (\text{VI.132})$$

cette la fonction $N(x)$ peut être réécrite aussi sous la forme

$$N(x) = -x \frac{d}{dx} (1 + e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \dots + e^{-nx}) = -x \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1 - e^{-x}} \right) \quad (\text{VI.133})$$

soit

$$N(x) = \frac{xe^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} \quad (\text{VI.134})$$

En substituant les expressions des fonctions $N(x)$ et $D(x)$ dans l'équation VI. 126, nous obtenons pour l'énergie moyenne la relation

$$\bar{E} = kT \frac{xe^{-x}(1 - e^{-x})}{(1 - e^{-x})^2} = kT \frac{hv}{kT} \frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})} = \frac{hv}{e^{\frac{hv}{kT}} - 1} \quad (\text{VI.135})$$

Par conséquent, la densité d'énergie u_ν contenue dans le volume d'une cavité contenant un rayonnement électromagnétique est

$$u_\nu = \frac{8\pi h}{c_0^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{hv}{kT}} - 1} \quad (\text{VI.136})$$

Trouvons maintenant, la relation entre la densité d'énergie u_ν et le pouvoir émissif spectral E_ν .

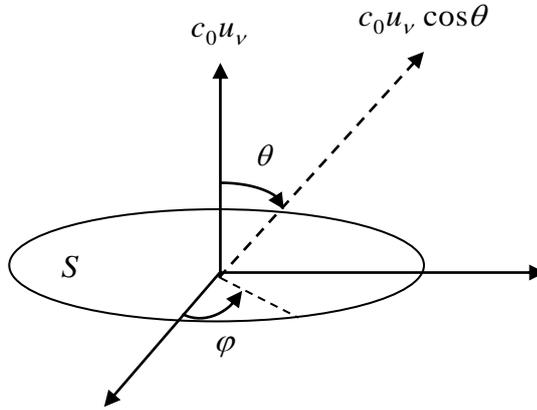


Figure VI. 12. Puissance rayonnée dans la direction θ .

Si nous appelons dP la puissance rayonnée par l'élément de surface dS , l'énergie $dPdt$ rayonnée pendant le temps dt est égale à l'énergie électromagnétique contenue dans le volume dSc_0dt , nous obtenons alors

$$\frac{dP}{dS} = \frac{1}{2} u_v c_0 \cos\theta \quad (\text{VI.137})$$

La puissance rayonnée par unité de surface est à répartir sur toutes les directions possibles, proportionnellement à l'angle solide $d\Omega$, ce qui permet d'écrire

$$E_{v,b} = \frac{\int_{\Omega} \frac{dP}{dS} d\Omega}{\int_{\Omega} d\Omega} \quad (\text{VI.138})$$

en y substituant les expressions de l'angle solide $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ et la puissance rayonnée par unité de surface $\frac{dP}{dS} = \frac{1}{2} u_v c_0 \cos\theta$, cette relation devient

$$E_{\nu,b} = \frac{1}{2} u_{\nu} c_0 \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta d\varphi} \quad (\text{VI.139})$$

en calculant les intégrales, nous aboutissons à la relation

$$E_{\nu,b} = \frac{c_0}{4} u_{\nu} \quad (\text{VI.140})$$

Si nous remplaçons la densité d'énergie u_{ν} par son expression, le pouvoir émissif spectral du corps noir devient

$$E_{\nu,b} = \frac{2\pi h}{c_0^2} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (\text{VI.141})$$

Généralement, nous utilisons à la place de la fréquence ν la longueur d'onde λ , pour cela écrivons l'expression du pouvoir émissif spectral en fonction de la longueur d'onde λ , en utilisant la relation

$$E_{\lambda,b} = -E_{\nu,b} \frac{d\nu}{d\lambda} \quad (\text{VI.142})$$

d'où

$$E_{\lambda,b} = -\frac{2\pi h}{c_0^2} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \frac{d\nu}{d\lambda} \quad (\text{VI.143})$$

à partir de la relation $\nu = \frac{c_0}{\lambda}$, nous avons

$$\frac{d\nu}{d\lambda} = -\frac{c_0}{\lambda^2} \quad (\text{VI.144})$$

Maintenant, en substituant $\frac{d\nu}{d\lambda} = -\frac{c_0}{\lambda^2}$ et $\nu = \frac{c_0}{\lambda}$ dans l'équation VI. 141, nous trouvons

$$E_{\lambda,b} = \frac{2\pi h}{c_0^2} \frac{\left(\frac{c_0}{\lambda}\right)^3}{\frac{hc_0}{e^{\lambda kT}} - 1} \frac{c_0}{\lambda^2} \quad (\text{VI.145})$$

soit

$$E_{\lambda,b}(\lambda, T) = \frac{2\pi h c_0^2}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc_0}{\lambda kT}} - 1 \right)} \quad (\text{VI.146})$$

L'intensité spectrale $I_{\lambda,b}(\lambda, T)$ pour un corps noir est par conséquent égale à

$$I_{\lambda,b}(\lambda, T) = \frac{2h c_0^2}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc_0}{\lambda kT}} - 1 \right)} \quad (\text{VI.147})$$

Si nous introduisons les constantes $C_1 = 2\pi h c_0^2$ et $C_2 = \frac{hc_0}{k}$, le pouvoir émissif spectral peut s'écrire sous la forme

$$E_{\lambda,b}(\lambda, T) = \frac{C_1}{\lambda^5 \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 \right)} \quad (\text{VI.148})$$

Cette formule s'appelle la loi de Planck pour le corps noir, connaissant les valeurs de $c_0 = 2,998.10^8 \text{ ms}^{-1}$, $h = 6,626.10^{-34} \text{ Js}$ et $k = 1,381.10^{-23} \text{ JK}^{-1}$ qui sont respectivement la vitesse de la

lumière dans le vide, la constante de Planck et la constante de Boltzmann, nous obtenons, pour les constantes C_1 et C_2 , les valeurs

$$C_1 = 2\pi hc_0^2 = 3,742 \cdot 10^8 \text{ W}\mu\text{m}^4 \text{ m}^{-2} \quad (\text{VI.149})$$

$$C_2 = \frac{hc_0}{k} = 1,439 \cdot 10^4 \mu\text{mK} \quad (\text{VI.150})$$

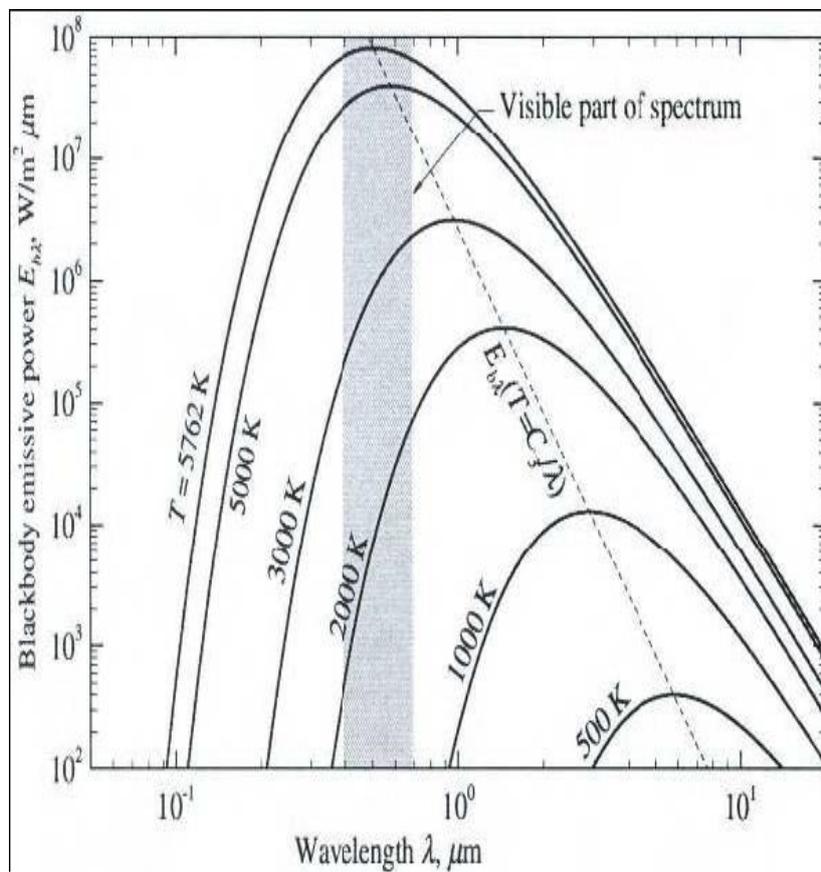


Figure VI. 13. Pouvoir émissif d'un corps noir en fonction de la longueur d'onde.

5. 3. Loi de déplacement de Wien

Nous remarquons que la distribution du pouvoir émissif spectral $E_{\lambda,b}(\lambda,T)$ d'un corps noir admet un maximum à λ_{\max} qui dépend de la température T . Pour trouver ce maximum, calculons

$$\frac{dE_{\lambda,b}(\lambda,T)}{d\lambda} = 0 \quad (\text{VI.151})$$

en dérivant la relation VI. 148 par rapport à la longueur d'onde λ nous obtenons

$$\frac{dE_{\lambda,b}(\lambda,T)}{d\lambda} = \frac{-5C_1\lambda^4 \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 \right) + C_1C_2 \frac{\lambda^3}{T} e^{\frac{C_2}{\lambda T}}}{\left(\lambda^5 \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 \right) \right)^2} = 0 \quad (\text{VI.152})$$

d'où

$$-5C_1\lambda^4 \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 \right) + C_1C_2 \frac{\lambda^3}{T} e^{\frac{C_2}{\lambda T}} = 0 \quad (\text{VI.153})$$

en simplifiant et en réarrangeant nous obtenons

$$\lambda T \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 \right) = \frac{C_2}{5} e^{\frac{C_2}{\lambda T}} \quad (\text{VI.154})$$

Si nous notons par $x = \frac{C_2}{\lambda T}$, cette relation s'écrit alors sous la forme

$$\frac{e^x - 1}{e^x} = \frac{x}{5} \quad (\text{VI.155})$$

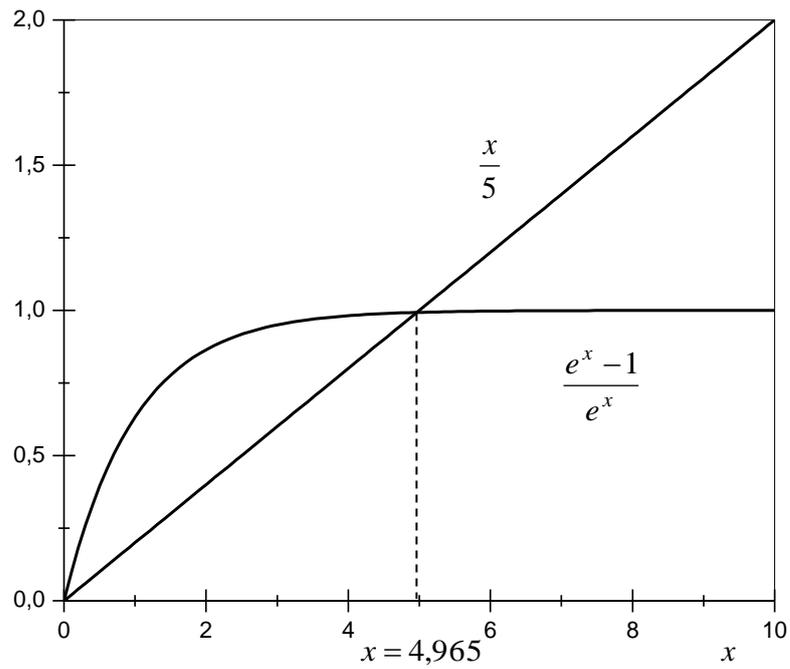


Figure VI. 14. Fonctions $\frac{e^x - 1}{e^x}$ et $\frac{x}{5}$.

Sur la figure VI. 14 nous avons représenté les fonctions $\frac{e^x - 1}{e^x}$ et

$\frac{x}{5}$ leur point d'intersection est la solution de l'équation

$\frac{e^x - 1}{e^x} = \frac{x}{5}$. La valeur x qui correspond à la solution est $x = 4,965$.

Sachant que $x = \frac{C_2}{\lambda T}$, nous pouvons écrire alors

$$\frac{C_2}{\lambda_{\max} T} = 4,965 \quad (\text{VI.156})$$

en y substituant la valeur numérique de la constante C_2 , nous obtenons

$$\lambda_{\max} T = 2898 \mu m K \quad (\text{VI.157})$$

Cette relation s'appelle la loi de déplacement de Wien. Cette loi montre que la longueur d'onde qui correspond à la valeur maximale du pouvoir émissif spectral est inversement proportionnelle à la température absolue du corps noir. Le pouvoir émissif spectral maximal $E_{\lambda_{\max}}(T)$ qui correspond à la longueur maximale λ_{\max} est obtenu en injectant la relation VI. 157 dans l'équation VI. 148, soit

$$E_b(\lambda_{\max}, T) = C_3 T^5 \quad (\text{VI.158})$$

Cette relation montre que Le pouvoir émissif spectral maximal $E_{\lambda_{\max}}(T)$ dépend de la puissance cinquième de la température absolue du corps noir.

5. 4. Cas limites de la loi de Planck

Maintenant, étudions les cas limites de la loi de Planck.

Considérons le cas où le terme $\frac{C_2}{\lambda T}$ est très petit devant l'unité,

nous pouvons alors développer le terme $e^{\frac{C_2}{\lambda T}}$ au premier ordre, soit

$$e^{\frac{C_2}{\lambda T}} = 1 + \frac{C_2}{\lambda T} \quad (\text{VI.159})$$

en substituant dans l'équation VI. 148, nous obtenons

$$E_{\lambda,b}(\lambda, T) = \frac{C_1}{\lambda^5 \left(1 + \frac{C_2}{\lambda T} - 1\right)} = \frac{C_1}{C_2} \frac{T}{\lambda^4} \quad (\text{VI.160})$$

Cette loi s'appelle la loi de Rayleigh-Jeans.

Si maintenant, nous considérons le cas où le terme $\frac{C_2}{\lambda T}$ est très grand devant l'unité, nous pouvons écrire alors que

$$E_{\lambda,b}(\lambda, T) = \frac{C_1}{\lambda^5} e^{-\frac{C_2}{\lambda T}} \quad (\text{VI.161})$$

cette loi s'appelle la loi de Wien.

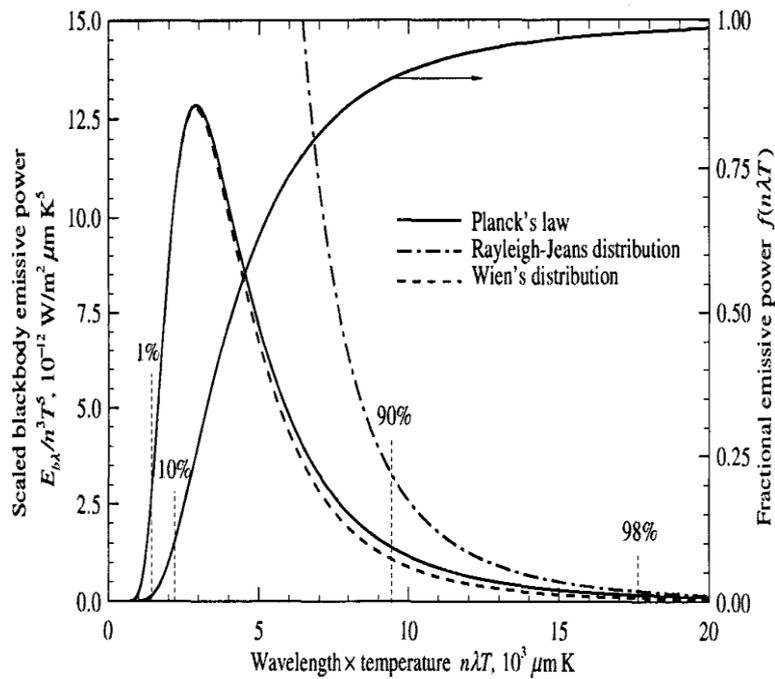


Figure VI. 15. Cas limites de la loi de Planck.

5. 5. Loi de Stefan-Boltzmann

Le pouvoir émissif total d'un corps noir $E_b(T)$ qui est obtenu en intégrant le pouvoir émissif spectral $E_{\lambda,b}(\lambda,T)$ sur toutes les longueurs d'onde possible λ , c'est-à-dire

$$E_b(T) = \int_0^{\infty} E_{\lambda,b}(\lambda,T) d\lambda \quad (\text{VI.162})$$

En utilisant l'équation VI. 148, nous pouvons réécrire cette relation sous la forme

$$E_b(T) = \int_0^{\infty} \frac{C_1 d\lambda}{\lambda^5 \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 \right)} \quad (\text{VI.163})$$

Pour calculer cette intégrale, faisons un changement de variable en posant $x = \frac{C_2}{\lambda T}$, d'où

$$d\lambda = -\frac{C_2}{T} \frac{dx}{x^2} \quad (\text{VI.164})$$

et ainsi, l'intégrale s'écrit

$$E_b(T) = \frac{C_1}{C_2^4} T^4 \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \quad (\text{VI.165})$$

Sachant que l'intégrale $\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$ est égale à $\frac{\pi^4}{15}$, nous obtenons

$$E_b(T) = \frac{\pi^4}{15} \frac{C_1}{C_2^4} T^4 \quad (\text{VI.166})$$

Si nous notons le terme constant $\frac{\pi^4 C_1}{15 C_2^4}$ par σ , le pouvoir émissif total d'un corps noir, s'écrit alors

$$E_b(T) = \sigma T^4 \quad (\text{VI.167})$$

la constante σ est appelée la constante de Stefan-Boltzmann et elle égale à

$$\sigma = 5,670.10^{-8} \text{ Wm}^{-2} \text{ K}^{-4} \quad (\text{VI.168})$$

L'équation VI. 167 est la loi de Stefan-Boltzmann, elle nous permet de calculer la quantité du rayonnement émise dans toutes les directions sur l'ensemble des longueurs d'ondes par un corps noir juste en connaissant sa température.

5. 6. Bandes d'émission

Parfois, il est nécessaire de connaître la fraction du pouvoir émissif total émis par un corps noir dans un certain intervalle de longueurs d'ondes $[0, \lambda]$. Pour une température et un intervalle de longueurs d'ondes donnés $[0, \lambda]$, cette fraction est déterminée à partir de la relation

$$f_{0-\lambda} = \frac{\int_0^{\lambda} E_{\lambda,b}(\lambda, T) d\lambda}{\int_0^{\infty} E_{\lambda,b}(\lambda, T) d\lambda} \quad (\text{VI.169})$$

en y introduisons l'expression du pouvoir émissif spectral $E_{\lambda,b}(\lambda, T)$, cette relation s'écrit

$$f_{0-\lambda} = \frac{\int_0^{\lambda} \frac{C_1 d\lambda}{\lambda^5 \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 \right)}}{\int_0^{\infty} \frac{C_1 d\lambda}{\lambda^5 \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 \right)}} = \frac{1}{\sigma T^4} \int_0^{\lambda} \frac{C_1 d\lambda}{\lambda^5 \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 \right)} \quad (\text{VI.170})$$

La fraction du pouvoir émissif spectral émis dans l'intervalle des longueurs d'ondes $[\lambda_1, \lambda_2]$ est

$$f_{\lambda_1-\lambda_2} = \frac{\int_0^{\lambda_2} E_{\lambda,b}(\lambda, T) d\lambda - \int_0^{\lambda_1} E_{\lambda,b}(\lambda, T) d\lambda}{\int_0^{\infty} E_{\lambda,b}(\lambda, T) d\lambda} = f_{0-\lambda_2} - f_{0-\lambda_1} \quad (\text{VI.171})$$

Si nous faisons le changement de variable $x = \lambda T$, la fraction du pouvoir émissif $f_{\lambda_1-\lambda_2}$ dans l'intervalle $[\lambda_1, \lambda_2]$ peut-être réécrit sous la forme

$$f_{x_1-x_2} = \frac{C_1}{\sigma} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x^5 \left(e^{\frac{C_2}{x}} - 1 \right)} \quad (\text{VI.172})$$

soit

$$f_{x_1-x_2} = f_{0-x_2} - f_{0-x_1} \quad (\text{VI.173})$$

5. 7. Loi de Stefan -Boltzmann à partir de la thermodynamique classique

Considérons une cavité de volume V à la température T et contenant des ondes électromagnétiques dont la densité d'énergie est u . A partir de la théorie électromagnétique de la lumière, la pression du rayonnement P dans la cavité est

$$P = \frac{u}{3} \quad (\text{VI.174})$$

Si U est l'énergie interne de la cavité, nous pouvons écrire alors

$$U = uV \quad (\text{VI.175})$$

À partir du premier principe de la thermodynamique, nous avons

$$dU = -PdV + TdS \quad (\text{VI.176})$$

ou encore

$$TdS = dU + PdV \quad (\text{VI.177})$$

Si nous y introduisons les expressions de l'énergie interne U et de la pression P , il vient alors

$$TdS = d(uV) + \frac{u}{3} dV = Vdu + udV + \frac{u}{3} dV \quad (\text{VI.178})$$

ou bien

$$TdS = Vdu + \frac{4}{3} udV \quad (\text{VI.179})$$

d'où l'expression de l'entropie dS

$$dS = \frac{V}{T} du + \frac{4}{3T} udV \quad (\text{VI.180})$$

Comme la densité d'énergie u des ondes électromagnétiques dans la cavité ne dépend que de la température T , nous pouvons écrire alors

$$du = \frac{du}{dT} dT \quad (\text{VI.181})$$

et dans ce cas, l'équation VI. 180 devient

$$dS = \frac{V}{T} \frac{du}{dT} dT + \frac{4}{3T} u dV \quad (\text{VI.182})$$

Puisque l'entropie S est fonction de la température T et du volume V , sa dérivée totale est

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T dV \quad (\text{VI.183})$$

en comparant les équations VI. 182 et VI. 183, nous obtenons

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = \frac{V}{T} \frac{du}{dT} \quad (\text{VI.184})$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \frac{4}{3T} u \quad (\text{VI.185})$$

Sachant que l'entropie S est une fonction d'état, elle doit impérativement vérifier la condition

$$\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} \quad (\text{VI.186})$$

Si nous calculons les fonctions $\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V}$ et $\frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T}$ en utilisant les relations VI. 184, VI. 185, nous obtenons

$$\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right) = \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{V}{T} \frac{du}{dT} \right) = \frac{1}{T} \frac{du}{dT} \quad (\text{VI.187})$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right) = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{4}{3T} u \right) = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{T} \frac{du}{dT} - \frac{u}{T^2} \right) \quad (\text{VI.188})$$

Si nous substituons ces expressions dans l'équation VI. 186, nous obtenons

$$\frac{1}{T} \frac{du}{dT} = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{T} \frac{du}{dT} - \frac{u}{T^2} \right) \quad (\text{VI.189})$$

équation, qui après simplification devient

$$\frac{4u}{T} = \frac{du}{dT} \quad (\text{VI.190})$$

soit

$$\frac{du}{u} = 4 \frac{dT}{T} \quad (\text{VI.191})$$

La solution de cette équation différentielle à variables séparables est

$$\ln u = \ln C + 4 \ln T \quad (\text{VI.192})$$

ou en éliminant la fonction logarithme

$$u(T) = CT^4 \quad (\text{VI.193})$$

La densité d'énergie u est liée au pouvoir émissif E_b par la relation

$$E_b = \frac{c_0}{4} u \quad (\text{VI.194})$$

ou encore

$$E_b = \frac{c_0 C}{4} T^4 = AT^4 \quad (\text{VI.195})$$

C'est la loi de Stefan-Boltzmann obtenue à partir de la thermodynamique classique.

6. Émission de rayonnement par des surfaces réelles

Ayant développé la notion de corps noir pour décrire les surfaces émettrices idéales, nous considérons à présent le comportement des surfaces réelles. Rappelons que le corps noir est un émetteur idéal et qu'aucune surface ne peut émettre plus de rayonnement à la même température. Par conséquent, le corps noir sert de référence dans la description du rayonnement émis par une surface réelle. Une propriété du rayonnement par une surface réelle connue sous le nom d'émissivité peut être définie comme le rapport du rayonnement émis par une surface réelle quelconque au rayonnement émis par un corps noir à la même température. En général, le rayonnement émis par une surface réelle diffère de rayonnement décrit par la loi de Planck. De même que, la distribution directionnelle diffère de celui d'une émission diffuse. Nous pouvons maintenant, définir l'émissivité spectrale directionnelle $\varepsilon_{\lambda,\theta}(\lambda, \theta, \varphi, T)$ d'une surface réelle à la température T comme le rapport de l'intensité du rayonnement émis à la longueur d'onde λ dans la direction (θ, φ) à l'intensité du rayonnement émis par un corps noir à la même température et la même longueur d'onde. Par conséquent

$$\varepsilon_{\lambda,\theta}(\lambda, \theta, \varphi, T) = \frac{I_{\lambda,e}(\lambda, \theta, \varphi, T)}{I_{\lambda,b}(\lambda, T)} \quad (\text{VI.196})$$

L'absence des variables directionnelles (θ, φ) au dénominateur implique l'intensité du rayonnement est indépendante de la direction ce qui est une caractéristique du rayonnement d'un corps noir. L'émissivité directionnelle totale $\varepsilon_{\theta}(\theta, \varphi, T)$, qui est la moyenne de l'émissivité spectrale directionnelle $\varepsilon_{\lambda,\theta}(\lambda, \theta, \varphi, T)$, est définie par la relation

$$\varepsilon_{\theta}(\theta, \varphi, T) = \frac{I_e(\theta, \varphi, T)}{I_b(T)} \quad (\text{VI.197})$$

L'émissivité spectrale hémisphérique $\varepsilon_\lambda(\lambda, T)$ est définie par

$$\varepsilon_\lambda(\lambda, T) = \frac{E_\lambda(\lambda, T)}{E_{\lambda, b}(\lambda, T)} \quad (\text{VI.198})$$

Si nous utilisons l'expression du pouvoir émissif spectral, nous obtenons

$$\varepsilon_\lambda(\lambda, T) = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} I_{\lambda, e}(\lambda, \theta, \varphi, T) \cos \theta \sin \theta \, d\theta \, d\varphi}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} I_{\lambda, b}(\lambda, T) \cos \theta \sin \theta \, d\theta \, d\varphi} \quad (\text{VI.199})$$

Sachant que l'intensité spectrale $I_{\lambda, b}(\lambda, T)$ du corps noir est indépendante de la direction (θ, φ) , et en utilisons la relation VI. 196, nous pouvons réécrire la relation sous la forme

$$\varepsilon_\lambda(\lambda, T) = \frac{I_{\lambda, b}(\lambda, T) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \varepsilon_{\lambda, \theta}(\lambda, \theta, \varphi, T) \cos \theta \sin \theta \, d\theta \, d\varphi}{I_{\lambda, b}(\lambda, T) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta \, d\theta \, d\varphi} \quad (\text{VI.200})$$

soit

$$\varepsilon_{\lambda}(\lambda, T) = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \varepsilon_{\lambda, \theta}(\lambda, \theta, \varphi, T) \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi} \quad (\text{VI.201})$$

Pour la plus part des surfaces, $\varepsilon_{\lambda, \theta}$ est indépendant de l'angle φ , ainsi en calculant l'intégrale dans le dénominateur, nous obtenons

$$\varepsilon_{\lambda}(\lambda, T) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \varepsilon_{\lambda, \theta}(\lambda, \theta, T) \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi \quad (\text{VI.202})$$

L'émissivité totale hémisphérique qui la moyenne sur toutes les directions possible et la totalité des longueurs d'ondes est

$$\varepsilon(T) = \frac{E(T)}{E_b(T)} \quad (\text{VI.203})$$

En utilisons les relations $E = \int_0^{\infty} E_{\lambda}(\lambda) d\lambda$ et $\varepsilon_{\lambda}(\lambda, T) = \frac{E_{\lambda}(\lambda, T)}{E_{\lambda, b}(\lambda, T)}$,

nous trouvons

$$\varepsilon(T) = \frac{\int_0^{\infty} \varepsilon_{\lambda}(\lambda, T) E_{\lambda, b}(\lambda, T) d\lambda}{E_b(T)} \quad (\text{VI.204})$$

7. Absorption, réflexion et transmission de rayonnement par des surfaces réelles

Nous avons déjà défini l'irradiation $G_{\lambda}(\lambda, \theta, \varphi)$ comme le taux du rayonnement de longueur d'onde λ incident sur l'unité de surface

par unité d'intervalle de longueur d'onde $d\lambda$ autour de la longueur d'onde λ .

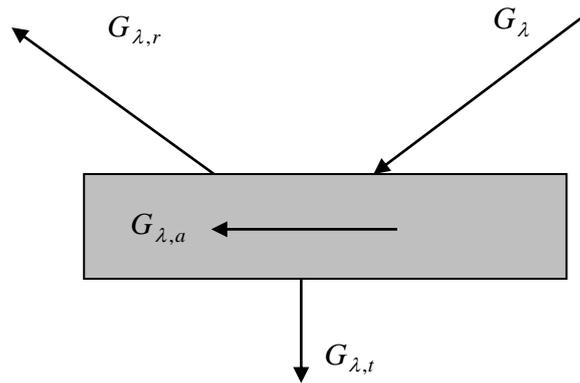


Figure VI. 16. Surface semi-transparente.

Généralement, l'irradiation interagit avec des milieux semi-transparentes, par conséquent une partie de ce rayonnement peut être absorbée, réfléchié ou transmise. Par un simple bilan, nous pouvons affirmer que

$$G_{\lambda} = G_{\lambda,r} + G_{\lambda,a} + G_{\lambda,t} \quad (\text{VI.205})$$

7. 1. Absorptivité

L'absorptivité détermine la fraction de l'irradiation absorbée par la surface. Comme l'émissivité elle dépend de la direction (θ, φ) et de la longueur d'onde λ . L'absorptivité spectrale directionnelle $\alpha_{\lambda}(\lambda, \theta, \varphi)$ est définie par la fraction de l'intensité spectrale incidente dans la direction (θ, φ) et absorbée par la surface. Par conséquent

$$\alpha_{\lambda,\theta}(\lambda, \theta, \varphi) = \frac{I_{\lambda,a}(\lambda, \theta, \varphi)}{I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \varphi)} \quad (\text{VI.206})$$

L'absorptivité spectrale hémisphérique $\alpha_\lambda(\lambda)$ est défini par

$$\alpha_\lambda(\lambda) = \frac{G_{\lambda,a}(\lambda)}{G_\lambda(\lambda)} \quad (\text{VI.207})$$

relation qui peut s'écrire aussi sous la forme

$$\alpha_\lambda(\lambda) = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \alpha_{\lambda,\theta}(\lambda, \theta, \varphi) I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \varphi) \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \varphi) \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi} \quad (\text{VI.208})$$

Si l'intensité incidente du rayonnement est diffuse et $\alpha_{\lambda,\theta}$ est indépendante de l'angle φ , l'équation VI. 208 devient

$$\alpha_\lambda(\lambda) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \alpha_{\lambda,\theta}(\lambda) \cos \theta \sin \theta d\theta \quad (\text{VI.209})$$

L'absorptivité hémisphérique totale α , représente la moyenne sur toutes les directions et les longueurs d'ondes, est définie par la fraction de l'irradiation totale, absorbée par la surface, soit

$$\alpha = \frac{G_a}{G} \quad (\text{VI.210})$$

relation que nous pouvons aussi écrire sous la forme

$$\alpha = \frac{\int_0^\infty \alpha_\lambda(\lambda) G_\lambda(\lambda) d\lambda}{\int_0^\infty G_\lambda(\lambda) d\lambda} \quad (\text{VI.211})$$

7. 2. Réflectivité

La réflectivité détermine la fraction du rayonnement incident réfléchi par la surface. Sa définition est plus compliquée du fait que de plus de son dépendance de la direction (θ, φ) du rayonnement incident, elle dépend aussi de la direction du rayonnement réfléchi. La réflectivité spectrale directionnelle $\rho_{\lambda, \theta}(\lambda, \theta, \varphi)$ d'une surface est définie comme la fraction de l'intensité spectrale incidente dans la direction (θ, φ) qui est réfléchie par la surface. Mathématiquement, elle est égale à

$$\rho_{\lambda, \theta}(\lambda, \theta, \varphi) = \frac{I_{\lambda, r}(\lambda, \theta, \varphi)}{I_{\lambda, i}(\lambda, \theta, \varphi)} \quad (\text{VI.212})$$

La réflectivité spectrale hémisphérique $\rho_{\lambda}(\lambda)$ est définie par la fraction de l'irradiation qui est réfléchie par la surface, soit

$$\rho_{\lambda}(\lambda) = \frac{G_{\lambda, r}(\lambda)}{G_{\lambda}(\lambda)} \quad (\text{VI.213})$$

relation qui peut être écrite sous la forme

$$\rho_{\lambda}(\lambda) = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \rho_{\lambda, \theta}(\lambda, \theta, \varphi) I_{\lambda, i}(\lambda, \theta, \varphi) \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} I_{\lambda, i}(\lambda, \theta, \varphi) \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi} \quad (\text{VI.214})$$

La réflectivité hémisphérique totale ρ est

$$\rho = \frac{G_r}{G} \quad (\text{VI.215})$$

ou en d'autres termes

$$\rho = \frac{\int_0^{\infty} \rho_{\lambda}(\lambda) G_{\lambda}(\lambda) d\lambda}{\int_0^{\infty} G_{\lambda}(\lambda) d\lambda} \quad (\text{VI.216})$$

7. 3. Transmissivité

La transmissivité spectrale hémisphérique $\tau_{\lambda}(\lambda)$ est définie par la fraction de l'irradiation qui est transmise la surface, soit

$$\tau_{\lambda}(\lambda) = \frac{G_{\lambda,t}(\lambda)}{G_{\lambda}(\lambda)} \quad (\text{VI.217})$$

La transmissivité hémisphérique totale τ est

$$\tau = \frac{G_t}{G} \quad (\text{VI.218})$$

relation qui peut être écrite sous la forme

$$\tau = \frac{\int_0^{\infty} \tau_{\lambda}(\lambda) G_{\lambda}(\lambda) d\lambda}{\int_0^{\infty} G_{\lambda}(\lambda) d\lambda} \quad (\text{VI.219})$$

A partir de la relation

$$G_{\lambda} = G_{\lambda,r} + G_{\lambda,a} + G_{\lambda,t} \quad (\text{VI.220})$$

nous pouvons écrire

$$\rho_{\lambda}(\lambda) G_{\lambda} + \alpha_{\lambda}(\lambda) G_{\lambda} + \tau_{\lambda}(\lambda) G_{\lambda} = G_{\lambda} \quad (\text{VI.221})$$

en simplifiant par G_λ , nous obtenons une relation qui lie entre elles la réflectivité spectrale, l'absorptivité spectrale et la transmissivité spectrale d'un milieu semi-transparent

$$\rho_\lambda(\lambda) + \alpha_\lambda(\lambda) + \tau_\lambda(\lambda) = 1 \quad (\text{VI.222})$$

Si nous considérons les valeurs moyennes sur toutes les longueurs d'ondes, nous pouvons aussi écrire que

$$\rho + \alpha + \tau = 1 \quad (\text{VI.223})$$

Pour un milieu opaque, il n'y a pas de transmission du rayonnement, dans ce cas, les relations précédentes s'écrivent

$$\rho_\lambda(\lambda) + \alpha_\lambda(\lambda) = 1 \quad (\text{VI.224})$$

$$\rho + \alpha = 1 \quad (\text{VI.225})$$

8. Loi de Kirchhoff

Considérons une cavité isotherme de température intérieure T_p contenant plusieurs corps C_i ($1 \leq i \leq n$) de surface S_i et de dimensions largement inférieures à celles de la cavité de sorte que leurs présences n'affectent pas le rayonnement établi qui résulte des émissions et réflexions successives par la paroi interne de la cavité, ainsi, cette paroi constitue un corps noir.

Quelque soit, leurs orientations, l'irradiation que chaque corps reçoit est diffuse et provient de l'émission de la paroi de la cavité, qui est un corps noir à la température T_p . Par conséquent, nous avons

$$G = E_b(T_p) \quad (\text{VI.226})$$

Dans l'état stationnaire, un équilibre thermique s'établi entre les différents corps C_i et la cavité, par conséquent, nous devons avoir la condition d'égalité des différentes températures, soit

$$T_1 = T_2 = T_3 = \dots = T_n = T_p \quad (\text{VI.227})$$

Cette égalité des températures implique la nullité du transfert net de rayonnement échangé entre les corps.

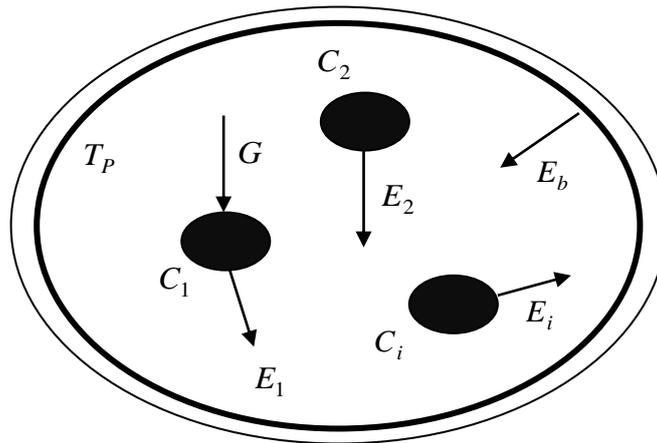


Figure VI. 17. Echange radiative dans une enceinte isotherme.

Faisons un bilan sur le corps C_1 , à l'équilibre thermique, le corps reçoit l'irradiation G et absorbe une énergie $\alpha_1 G S_1$, au même temps, il émet l'énergie $E_1(T_1)$, par conséquent, nous devons avoir l'égalité

$$\alpha_1 G S_1 = E_1(T_P) S_1 \quad (\text{VI.228})$$

en utilisant la relation VI. 226, nous pouvons aussi écrire

$$\alpha_1 E_b(T_P) S_1 = E_1(T_P) S_1 \quad (\text{VI.229})$$

soit

$$E_b(T_P) = \frac{E_1(T_P)}{\alpha_1} \quad (\text{VI.230})$$

ce résultat s'applique à chaque corps C_i , nous obtenons ainsi la relation

$$\frac{E_1(T_p)}{\alpha_1} = \frac{E_2(T_p)}{\alpha_2} = \frac{E_3(T_p)}{\alpha_3} = \dots = \frac{E_n(T_p)}{\alpha_n} = E_b(T_p) \quad (\text{VI.231})$$

Cette relation est la loi de Kirshhoff. Comme les absorptivités α_i sont inférieures à l'unité, nous devons toujours avoir $E_i(T_i) < E_b(T_p)$. Ainsi, aucune surface réelle n'a un pouvoir émissif supérieur à celui d'un corps noir à la même température. Si nous utilisons la relation $\varepsilon = \frac{E}{E_b}$, alors l'équation s'écrit

$$\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1} = \frac{\varepsilon_2}{\alpha_2} = \frac{\varepsilon_3}{\alpha_3} = \dots = \frac{\varepsilon_n}{\alpha_n} = 1 \quad (\text{VI.232})$$

Ce résultat montre que pour n'importe quelle cavité, l'émissivité hémisphérique totale est égale à l'absorptivité hémisphérique totale, soit

$$\varepsilon = \alpha \quad (\text{VI.233})$$

Cette relation peut être généralisée pour les grandeurs spectrales et directionnelles, ainsi, nous devons avoir toujours les égalités

$$\varepsilon_\lambda = \alpha_\lambda \quad (\text{VI.234})$$

$$\varepsilon_{\lambda,\theta} = \alpha_{\lambda,\theta} \quad (\text{VI.235})$$

9. Surfaces grises

Selon les définitions des propriétés spectrales hémisphériques, cherchons sous quelles conditions, l'égalité suivante est valable

$$\varepsilon_\lambda(\lambda, T) = ? \alpha_\lambda(\lambda) \quad (\text{VI.236})$$

soit

$$\begin{aligned}
& \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \varepsilon_{\lambda,\theta}(\lambda, \theta, \varphi, T) \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi} \\
& = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \alpha_{\lambda,\theta}(\lambda, \theta, \varphi) I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \varphi) \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \varphi) \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi}
\end{aligned} \tag{VI.237}$$

Comme en vertu de la loi de Kirchhoff, nous avons $\varepsilon_{\lambda}(\lambda, T) = \alpha_{\lambda}(\lambda)$, $\varepsilon_{\lambda,\theta} = \alpha_{\lambda,\theta}$, cette égalité tient si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

- a) L'irradiation $I_{\lambda,i}$ est diffuse, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas de la direction (θ, φ) ,
- b) La surface est diffuse, c'est-à-dire que $\varepsilon_{\lambda,\theta}$ et $\alpha_{\lambda,\theta}$ ne dépendent pas de la direction (θ, φ) .

La première condition est satisfaite dans la plus part des cas. La deuxième condition aussi est satisfaite pour beaucoup de surfaces, surtout les surfaces non-conductrices d'électricité.

En supposant que l'irradiation et la surface sont diffuses, cherchons sous quelles conditions l'égalité $\varepsilon = \alpha$ est valide

$$\varepsilon = ? \alpha \tag{VI.238}$$

soit

$$\frac{\int_0^{\infty} \varepsilon_{\lambda}(\lambda, T) E_{\lambda, b}(\lambda, T) d\lambda}{E_b(T)} = \frac{\int_0^{\infty} \alpha_{\lambda}(\lambda) G_{\lambda}(\lambda) d\lambda}{G} \quad (\text{VI.239})$$

Comme $\varepsilon_{\lambda} = \alpha_{\lambda}$, l'égalité tient si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite.

- a) L'irradiation correspond à l'émission d'un corps noir ayant la température de la surface en question,
- b) La surface est grise, c'est-à-dire que ε_{λ} et α_{λ} sont indépendants de la longueur d'onde λ .

10. Facteur de forme

10. 1. Définition du facteur de forme

Considérons deux surfaces rayonnantes quelconques S_i et S_j orientées arbitrairement dans l'espace. Les éléments de surfaces dS_i et dS_j sont séparées par la distance \bar{r} qui fait les angles θ_i et θ_j avec les vecteurs normales aux surfaces \vec{n}_i et \vec{n}_j . Le facteur F_{ij} est défini comme la fraction du rayonnement quittant la surface S_i et intercepté par la surface S_j .

La quantité du rayonnement quittant l'élément de surface dS_i et interceptée par l'élément de surface dS_j est

$$dq_{ij} = I_{e+r,i} \cos\theta_i dS_i d\Omega_{ji} \quad (\text{VI.240})$$

où $I_{e+r,i}$ est l'intensité du rayonnement quittant l'élément de surface dS_i par émission et réflexion et $d\Omega_{ji}$ est l'angle solide sur l'élément de surface dS_j vu par l'élément de surface dS_i . Cette angle solide $d\Omega_{ji}$ est naturellement donné par la relation

$$d\Omega_{ji} = \frac{\cos\theta_j dS_j}{r^2} \quad (\text{VI.241})$$

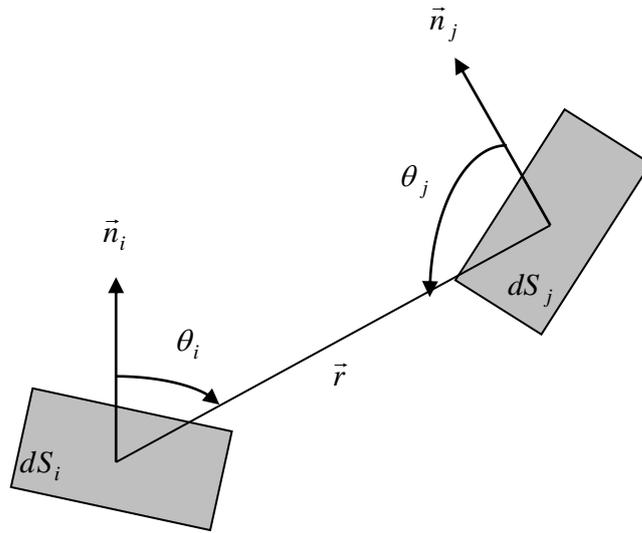


Figure VI. 18. Facteur de forme.

Si nous admettons que la surface S_i émis et réfléchi d'une façon diffuse, nous pouvons remplacer l'intensité $I_{e+r,i}$ par la radiosité ($J_i = \pi I_{e+r,i}$). En substituant l'expression de l'angle solide $d\Omega_{ji}$ et de l'intensité $I_{e+r,i}$ dans la relation, nous obtenons

$$dq_{ij} = J_i \frac{\cos\theta_i \cos\theta_j dS_i dS_j}{\pi r^2} \quad (\text{VI.242})$$

La quantité du rayonnement totale quittant la surface S_i et interceptée par la surface S_j est obtenue en intégrant sur la totalité des surfaces S_i et S_j , soit

$$q_{ij} = J_i \int_{S_i} \int_{S_j} \frac{\cos\theta_i \cos\theta_j dS_i dS_j}{\pi r^2} \quad (\text{VI.243})$$

où la radiosité J_i est considérée comme uniforme sur toute la surface S_i . Le facteur de forme F_{ij} , comme nous l'avons défini, s'écrit alors

$$F_{ij} = \frac{q_{ij}}{S_i J_i} \quad (\text{VI.244})$$

En utilisant la relation VI. 243, nous obtenons pour le facteur de forme F_{ij} l'équation

$$F_{ij} = \frac{1}{S_i} \int_{S_i} \int_{S_j} \frac{\cos\theta_i \cos\theta_j dS_i dS_j}{\pi r^2} \quad (\text{VI.245})$$

De la même façon, le facteur de forme F_{ji} est défini comme la fraction du rayonnement quittant la surface S_j et intercepté par la surface S_i . Avec un raisonnement similaire, nous obtenons la relation suivante pour le facteur de forme F_{ji} , soit

$$F_{ji} = \frac{1}{S_j} \int_{S_j} \int_{S_i} \frac{\cos\theta_i \cos\theta_j dS_i dS_j}{\pi r^2} \quad (\text{VI.246})$$

10. 2. Propriétés du facteur de forme

A partir des équations VI.245 et VI.246, nous pouvons écrire

$$\int_{S_i} \int_{S_j} \frac{\cos\theta_i \cos\theta_j dS_i dS_j}{\pi r^2} = F_{ij} S_i = F_{ji} S_j \quad (\text{VI.247})$$

d'où la relation

$$F_{ij} S_i = F_{ji} S_j \quad (\text{VI.248})$$

appelée relation de réciprocité.

Pour une enceinte fermée nous avons aussi la relation

$$\sum_{j=1}^{j=n} F_{ij} = 1 \quad (\text{VI.249})$$

Notons que si une surface S_i est convexe ou plane, le facteur de forme $F_{ii} = 0$ et si elle est concave $F_{ii} \neq 0$.

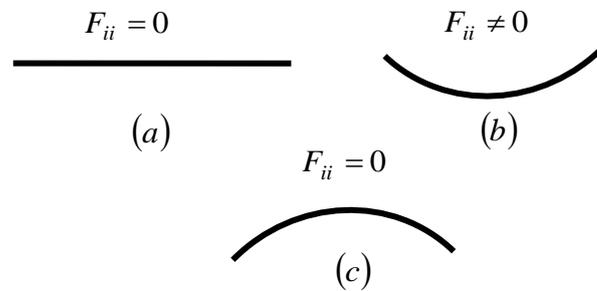


Figure VI. 19. Facteur de forme F_{ii} , (a) : surface plane, (b) : surface concave, (c) : surface convexe.

Pour une enceinte formée par n surfaces S_i , il faut déterminer n^2 facteurs de forme que nous pouvons écrire sous la forme d'une matrice

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & \vdots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & \vdots & F_{2n} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & \vdots & F_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_{n1} & F_{n2} & F_{n3} & \vdots & F_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{VI.250})$$

Cependant, il n'est pas nécessaire de déterminer les n^2 individuellement. Les n facteurs de facteurs sont déterminés à partir de la règle de sommation appliquée à chaque surface. En plus

de ça, $\frac{n(n-1)}{2}$ facteurs de forme sont obtenus à partir de la relation de réciprocité, il ne reste alors en fin de compte que seulement $n^2 - n - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ facteurs de forme à calculer directement. Pour illustrer ce qui a été dit, considérons une enceinte formée de trois surfaces S_1 , S_2 et S_3 . Pour cette enceinte, la matrice F s'écrit

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{VI.251})$$

Il y donc neuf facteurs de forme, il ne reste alors que $\frac{3(3-1)}{2} = 3$ facteurs de forme à déterminer directement et qui sont F_{12} , F_{13} et F_{23} . Les six autres facteurs de forme sont obtenus à partir des règles de réciprocité et de sommation. En appliquant les règles de réciprocité et de sommation, nous pouvons écrire les six relations nécessaires pour la détermination des six facteurs de forme restants, ces relations sont

$$F_{11} + F_{12} + F_{13} = 1 \quad (\text{VI.252})$$

$$F_{21} + F_{22} + F_{23} = 1 \quad (\text{VI.253})$$

$$F_{31} + F_{32} + F_{33} = 1 \quad (\text{VI.254})$$

$$F_{12}S_1 = F_{21}S_2 \quad (\text{VI.255})$$

$$F_{13}S_1 = F_{31}S_3 \quad (\text{VI.256})$$

$$F_{23}S_2 = F_{32}S_3 \quad (\text{VI.257})$$

11. Échanges radiatifs entre des surfaces opaques, diffuses et grises dans une enceinte

Pour étudier les échanges entre les surfaces dans une enceinte, nous devons faire certaines hypothèses. Chaque surface de l'enceinte est supposée être à une température uniforme et caractérisée par une radiosité et irradiation uniformes. Nous supposons aussi que les surfaces sont opaques, diffuses et grises et que le milieu dans l'enceinte est considéré comme non-participatif. L'énergie rayonnante q_i qui quitte la surface S_i est égale à la différence entre la radiosité J_i émise par cette surface et l'irradiation incidente G_i qu'elle reçoit. Par conséquent, nous devons écrire que

$$q_i = S_i J_i - S_i G_i \quad (\text{VI.258})$$

À partir de la définition de la radiosité, nous avons

$$J_i = E_i + \rho_i G_i \quad (\text{VI.259})$$

Comme la surface est opaque, nous avons la relation

$$\rho_i = 1 - \alpha_i \quad (\text{VI.260})$$

la relation VI. 259 s'écrit

$$J_i = E_i + (1 - \alpha_i) G_i \quad (\text{VI.261})$$

En substituant cette relation dans l'équation VI. 258, nous trouvons

$$q_i = S_i (E_i + (1 - \alpha_i) G_i) - S_i G_i \quad (\text{VI.262})$$

soit

$$q_i = S_i (E_i - \alpha_i G_i) \quad (\text{VI.263})$$

Sachant que le pouvoir émissif E_i de la surface peut être exprimé en fonction du pouvoir émissif d'un corps noir à la même température $E_{b,i}$ par la relation $E_i = \varepsilon_i E_{b,i}$, de plus à partir de la loi de Kirshhoff, nous avons $\alpha_i = \varepsilon_i$, nous pourrions maintenant, réécrire les relations VI. 261 et VI. 263 sous la forme

$$J_i = \varepsilon_i E_{b,i} + (1 - \varepsilon_i) G_i \quad (\text{VI.264})$$

$$q_i = S_i \varepsilon_i (E_{b,i} - G_i) \quad (\text{VI.265})$$

De l'équation VI. 264, l'irradiation G_i est

$$G_i = \frac{J_i - \varepsilon_i E_{b,i}}{1 - \varepsilon_i} \quad (\text{VI.266})$$

sa substitution dans les relations VI. 265, nous conduit à la relation

$$q_i = S_i \left(J_i - \frac{J_i - \varepsilon_i E_{b,i}}{1 - \varepsilon_i} \right) \quad (\text{VI.267})$$

soit

$$q_i = \frac{\varepsilon_i S_i}{1 - \varepsilon_i} (E_{b,i} - J_i) \quad (\text{VI.268})$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme

$$q_i = \frac{E_{b,i} - J_i}{\frac{1 - \varepsilon_i}{\varepsilon_i S_i}} \quad (\text{VI.269})$$

Nous concluons que ce transfert radiatif peut être associé au potentiel $E_{b,i} - J_i$ et à une résistance radiative de la

surface $R_r = \frac{1 - \varepsilon_i}{\varepsilon_i S_i}$.

11. 1. Échanges radiatifs entre les surfaces

L'irradiation G_i de la surface S_i de toutes les radiosités émise par toutes les surfaces de l'enceinte y compris la surface elle-même. Nous pouvons écrire alors

$$S_i G_i = \sum_{j=1}^{j=n} S_j F_{ji} J_j \quad (\text{VI.270})$$

En utilisant la relation de réciprocité $S_i F_{ij} = S_j F_{ji}$, cette équation devient

$$S_i G_i = \sum_{j=1}^{j=n} S_i F_{ij} J_j \quad (\text{VI.271})$$

En éliminant la surface S_i et en substituant dans l'équation VI. 263, nous obtenons

$$q_i = S_i \left(J_i - \sum_{j=1}^{j=n} F_{ij} J_j \right) \quad (\text{VI.272})$$

11. 1. 1. Surfaces isothermes

Supposons que les surfaces S_i de l'enceinte sont maintenues aux températures uniformes T_i . En utilisant la loi de Stefan-Boltzmann, la relation VI. 268 s'écrit alors sous la forme

$$q_i = \frac{\varepsilon_i S_i}{1 - \varepsilon_i} (\sigma T_i^4 - J_i) \quad (\text{VI.273})$$

En combinant les équations VI. 272 et VI. 273, nous obtenons

$$J_i - \sum_{j=1}^{j=n} F_{ij} J_j = \frac{\varepsilon_i}{1 - \varepsilon_i} (\sigma T_i^4 - J_i) \quad (\text{VI.274})$$

qui après réarrangement devient

$$J_i - (1 - \varepsilon_i) \sum_{j=1}^{j=n} F_{ij} J_j = \varepsilon_i \sigma T_i^4 \quad (\text{VI.275})$$

Si nous faisons intervenir le symbole de Kronecker δ_{ij} , nous pouvons alors écrire

$$J_i = \delta_{ij} J_j \quad (\text{VI.276})$$

et ainsi, l'équation VI. 275 devient

$$\delta_{ij} J_j - (1 - \varepsilon_i) \sum_{j=1}^{j=n} F_{ij} J_j = \varepsilon_i \sigma T_i^4 \quad (\text{VI.277})$$

Mais comme la sommation est sur l'indice j , il nous est permis de mettre le signe de sommation devant tout le membre de gauche de l'équation et obtenir

$$\sum_{j=1}^{j=n} (\delta_{ij} - (1 - \varepsilon_i) F_{ij}) J_j = \varepsilon_i \sigma T_i^4 \quad (\text{VI.278})$$

Puisque les indices i et j varient de 1 à n , et que la sommation est sur l'indice j , nous pouvons expliciter l'équation et obtenir un système de n équations pour les radiosités J_i . Ce système d'équations sous forme matricielle est

$$\begin{bmatrix} 1 - (1 - \varepsilon_1) F_{11} & -(1 - \varepsilon_1) F_{12} & \cdot & -(1 - \varepsilon_1) F_{1n} \\ -(1 - \varepsilon_2) F_{21} & 1 - (1 - \varepsilon_2) F_{22} & \cdot & -(1 - \varepsilon_2) F_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -(1 - \varepsilon_n) F_{n1} & -(1 - \varepsilon_n) F_{n2} & \cdot & 1 - (1 - \varepsilon_n) F_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \cdot \\ J_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \sigma T_1^4 \\ \varepsilon_2 \sigma T_2^4 \\ \cdot \\ \varepsilon_n \sigma T_n^4 \end{bmatrix} \quad (\text{VI.279})$$

11. 1. 2. Surfaces soumises à un flux de chaleur pariétal

Supposons que les surfaces S_i de l'enceinte sont soumises aux flux de chaleurs pariétaux q_i . A partir de la relation VI. 272, nous avons

$$J_i - \sum_{j=1}^{j=n} F_{ij} J_j = \frac{q_i}{S_i} \quad (\text{VI.280})$$

Si nous faisons intervenir le symbole de Kronecker δ_{ij} , nous pouvons alors écrire

$$J_i = \delta_{ij} J_j \quad (\text{VI.281})$$

d'où

$$\delta_{ij} J_j - \sum_{j=1}^{j=n} F_{ij} J_j = \frac{q_i}{S_i} \quad (\text{VI.282})$$

mais comme la sommation est indépendante de l'indice i , nous pouvons transcrire cette équation sous la forme

$$\sum_{j=1}^{j=n} (\delta_{ij} - F_{ij}) J_j = \frac{q_i}{S_i} \quad (\text{VI.283})$$

Puisque les indices i et j varient de 1 à n , et que la sommation est sur l'indice j , nous pouvons expliciter l'équation et obtenir un système de n équations pour les radiosités J_i . Ce système d'équations sous forme matricielle est

$$\begin{bmatrix} 1-F_{11} & -F_{12} & \cdot & -F_{1n} \\ -F_{21} & 1-F_{22} & \cdot & -F_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -F_{n1} & -F_{n2} & \cdot & 1-F_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \cdot \\ J_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{q_1}{S_1} \\ \frac{q_2}{S_2} \\ \cdot \\ \frac{q_n}{S_n} \end{bmatrix} \quad (\text{VI.284})$$

12. Échanges radiatifs entre des surfaces noires

Si l'enceinte est constituée de surfaces noires, le rayonnement net échangée par la surface S_i est

$$q_i = S_i (E_{b,i} - G_i) \quad (\text{VI.285})$$

L'irradiation qui tombe sur la surface S_i et qui provient des autres surfaces S_j est

$$S_i G_i = E_{b,1} S_1 F_{1i} + E_{b,2} S_2 F_{2i} + \dots + E_{b,n} S_n F_{ni} = \sum_{j=1}^{j=n} E_{b,j} S_j F_{ji}$$

A partir de la relation de réciprocité

$$S_i F_{ij} = S_j F_{ji} \quad (\text{VI.286})$$

La relation VI. 285 s'écrit

$$q_i = S_i E_{b,i} - \sum_{j=1}^{j=n} E_{b,j} S_j F_{ji} = S_i E_{b,i} - \sum_{j=1}^{j=n} E_{b,j} S_i F_{ij} \quad (\text{VI.287})$$

soit

$$q_i = S_i \left(E_{b,i} - \sum_{j=1}^{j=n} E_{b,j} F_{ij} \right) \quad (\text{VI.288})$$

ou bien

$$q_i = \sum_{j=1}^{j=n} (E_{b,i} - E_{b,j}) S_i F_{ij} \quad (\text{VI.289})$$