التعـدد الخــطي

MULTICOLLINEARITY

مقدمة

إن تحليل الانحدار المتعدد الذي يضم عدة متغيرات مستقلة، قد ينشئ مشاكل قياسية مسببة تشوها للنموذج المقدر، بسبب البيانات المأخوذة ونوعيتها، فاستخدام البيانات الخاطئة والمرتبة وفقا لترتيب معين أو سلوك بعض من المتغيرات سلوكا باتجاه واحد، يجعل هذه المتغيرات تترابط فيما بينها، وحقيقة هذا الأمر يظهر في بيانات السلاسل الزمنية أكثر مما يظهر في الأنواع الأخرى من البيانات، فعند تقدير النموذج الذي تعتريه هذه المشكلة قد تكون معامل التحديد R^2 عالية جدا، وقد تصل إلى 100%، وبالتالي فإن إحصائية FISHER المحسوبة F_{cal} تكون عالية جدا، وعدم معنوية معلمات النموذج نظرا لصغر قيمة احصائية STUDENT المحسوبة St_{cal} ، ما ينتج انحدارا مزيفا لا يعكس حقيقة الظاهرة المدروسة.

أولا: طبيعة مشكلة التعدد الخطي

إن مشكلة التعدد الخطي التي تواجه النماذج الخطية المتعدد قد تأخذ أحد النوعين التاليين:

- **الإرتباط الخطي التام PREFECT MULTICOLLINEARITY:** في حال حدوث ارتباط خطي تام بين المتغيرات المستقلة في النموذج، فإنه يستحيل أصلا تقدير النموذج، لأن محدد المصفوفة $(X'X)$ يكون مساويا للصفر، أي $Det(X'X)=0$. فلو كان لدينا النموذج الخطي المتعدد التالي:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \varepsilon_t$$

ولو افترضنا أن هناك ارتباطا خطيا تاما بين X_{2t} و X_{3t} كما يلي: $X_{3t} = 2 \cdot X_{2t}$ ، فإن النموذج السابق يمكن صياغته كمايلي:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 (2 \cdot X_{2t}) + \varepsilon_t$$

والذي يأخذ الشكل المصفوفاتي التالي:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ M \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & X_{21} & 2X_{21} \\ 1 & X_{22} & 2X_{22} \\ M & M & M \\ 1 & X_{2n} & 2X_{2n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ M \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

وبالتالي نجد:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y = \begin{pmatrix} n & \sum X_{2t} & 2\sum X_{2t} \\ \sum X_{2t} & \sum X_{2t}^2 & 2\sum X_{2t}^2 \\ 2\sum X_{2t} & 2\sum X_{2t}^2 & 4\sum X_{2t}^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum Y_t \\ \sum X_{2t} Y_t \\ 2\sum X_{2t} Y_t \end{pmatrix}$$

حيث:

$$(X'X)=\begin{pmatrix} n & \sum X_{2t} & 2\sum X_{2t} \\ \sum X_{2t} & \sum X_{2t}^2 & 2\sum X_{2t}^2 \\ 2\sum X_{2t} & 2\sum X_{2t}^2 & 4\sum X_{2t}^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}(X'X) &= (-1)^{1+1}(n)\mathrm{Det}\begin{pmatrix} \sum X_{2t}^2 & 2\sum X_{2t}^2 \\ 2\sum X_{2t}^2 & 4\sum X_{2t}^2 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2}(\sum X_{2t})\mathrm{Det}\begin{pmatrix} \sum X_{2t} & 2\sum X_{2t}^2 \\ 2\sum X_{2t} & 4\sum X_{2t}^2 \end{pmatrix} \\ &\quad + (-1)^{1+3}(2\sum X_{2t})\mathrm{Det}\begin{pmatrix} \sum X_{2t} & \sum X_{2t}^2 \\ 2\sum X_{2t} & 2\sum X_{2t}^2 \end{pmatrix} \\ &= n\cdot\left[4\cdot\left(\sum X_{2t}^2\right)^2 - 4\cdot\left(\sum X_{2t}^2\right)^2\right] - (\sum X_{2t})\cdot\left[4\cdot\left(\sum X_{2t}^2\right)^2 - 4\cdot\left(\sum X_{2t}^2\right)^2\right] \\ &\quad + (2\sum X_{2t})\cdot\left[2\sum X_{2t}\sum X_{2t}^2 - 2\sum X_{2t}\sum X_{2t}^2\right] = 0 \end{aligned}$$

وبالتالي فإن محدد المصفوفة $(X'X)$ يساوي صفر، ولا يمكن الحصول على معكوس هذه المصفوفة، وبالتالي استحالة تقدير هذا النموذج في حالة الارتباط الخطي التام.

- **الارتباط الخطي الغير تام IMPERFECT MULTICOLLINEARITY:** في حالة الارتباط الخطي غير التام يمكن تقدير معالم النموذج، لأنه يمكننا ايجاد معكوس المصفوفة $(X'X)$ ، طالما أن محددها غير معدوم. ولا يمكن التأكد منه إلا باختبارات الكشف عن هذه المشكلة.

فلو كان لدينا النموذج الخطي المتعدد التالي:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \varepsilon_t$$

ولو افترضنا أن هناك ارتباطا خطيا غير تام بين X_{2t} و X_{3t} كما يلي: $X_{3t} = X_{2t} + 1$ ، فإن النموذج السابق يمكن صياغته كمايلي:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 (X_{2t} + 1) + \varepsilon_t$$

والذي يأخذ الشكل المصفوفاتي التالي:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ M \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & X_{21} & X_{21}+1 \\ 1 & X_{22} & X_{22}+1 \\ M & M & M \\ 1 & X_{2n} & X_{2n}+1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ M \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

وبالتالي نجد:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y = \begin{pmatrix} n & \sum X_{2t} & n+\sum X_{2t} \\ \sum X_{2t} & \sum X_{2t}^2 & \sum X_{2t}+\sum X_{2t}^2 \\ n+\sum X_{2t} & \sum X_{2t}+\sum X_{2t}^2 & \sum X_{2t}^2+2\sum X_{2t}+n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum Y_t \\ \sum X_{2t}Y_t \\ 2\sum X_{2t}Y_t \end{pmatrix}$$

حيث:

$$(X'X)=\begin{pmatrix} n & \sum X_{2t} & n+\sum X_{2t} \\ \sum X_{2t} & \sum X_{2t}^2 & \sum X_{2t}+\sum X_{2t}^2 \\ n+\sum X_{2t} & \sum X_{2t}+\sum X_{2t}^2 & \sum X_{2t}^2+2\sum X_{2t}+n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}(X'X) &= (-1)^{1+1}(n)\mathrm{Det}\begin{pmatrix} \sum X_{2t}^2 & \sum X_{2t}+\sum X_{2t}^2 \\ \sum X_{2t}+\sum X_{2t}^2 & \sum X_{2t}^2+2\sum X_{2t}+n \end{pmatrix} \\ &\quad + (-1)^{1+2}(\sum X_{2t})\mathrm{Det}\begin{pmatrix} \sum X_{2t} & \sum X_{2t}+\sum X_{2t}^2 \\ n+\sum X_{2t} & \sum X_{2t}^2+2\sum X_{2t}+n \end{pmatrix} \\ &\quad + (-1)^{1+3}(n+\sum X_{2t})\mathrm{Det}\begin{pmatrix} \sum X_{2t} & \sum X_{2t}^2 \\ n+\sum X_{2t} & \sum X_{2t}+\sum X_{2t}^2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}(X'X) &= n\cdot\left[\left(\left(\sum X_{2t}^2\right)^2+2\sum X_{2t}\sum X_{2t}^2+n\sum X_{2t}^2\right)-\left((\sum X_{2t})^2+2\sum X_{2t}\sum X_{2t}^2+\left(\sum X_{2t}^2\right)^2\right)\right] \\ &\quad -(\sum X_{2t})\cdot\left[\left(\sum X_{2t}\sum X_{2t}^2+2(\sum X_{2t})^2+n\sum X_{2t}\right)-\left(n\sum X_{2t}+n\sum X_{2t}^2+(\sum X_{2t})^2+\sum X_{2t}\sum X_{2t}^2\right)\right] \\ &\quad +(n+\sum X_{2t})\cdot\left[\left((\sum X_{2t})^2+\sum X_{2t}\sum X_{2t}^2\right)-\left(n\sum X_{2t}^2+\sum X_{2t}\sum X_{2t}^2\right)\right] \\ &= n\left[(n-1)\sum X_{2t}^2\right]-(\sum X_{2t})\left[(2-n)(\sum X_{2t})^2\right]+(n+\sum X_{2t})\left[(\sum X_{2t})^2-n\sum X_{2t}^2\right]\neq 0\end{aligned}$$

1- أسباب مشكلة التعدد الخطي:

من أهم الأسباب التي تؤدي إلى نشوء مشكلة التعدد الخطي نذكر مايلي:[1]

- اتجاه المتغيرات الاقتصادية للتغير معا مع مرور الزمن، فإذا أخذنا المتغيرات الاقتصادية التالية: الدخل، الاستهلاك، الاستثمار والعمالة، فنجد أنها بمرور الزمن ستتزايد، وبما أنه هناك ارتباط بين هذه المتغيرات، فالتعدد الخطي واقع لا محالة.
- إدراج متغيرات ذات ابطاء زمني كمتغيرات مستقلة في النموذج الخطي المتعدد، فدخل الفترة الحالية مثلا يتحدد جزئيا بدخل الفترة السابقة، وهذا ما يعني أن هناك ارتباط بين القيم المتتالية لمتغير معين، وبالتالي نشوء مشكلة التعدد الخطي.

2- نتائج مشكلة التعدد الخطي:

من أثار مشكلة التعدد الخطي على النموذج نجد:[2]

- محدد المصفوفة $(X'X)$ صغير نسبيا وقريب من الصفر، مما يعطي معكوسا بعناصر كبيرة نسبيا، ما يؤدي الى الحصول على تباينات للمعلمات كبيرة جدا، ما يودي إلى تضاؤل احصائية STUDENT المحسوبة St_{cal} ، وبالتالي عدم معنوية المعلمات المقدرة، والاتجاه نحو قبول فرضية العدم ورفض الفرضية البديلة.
- وجود علاقة طردية بين معامل الارتباط بين المتغيرات المستقلة وارتفاع تباين المعلمات المقدرة.
- ارتفاع قيمة معامل التحديد، مما يوجه الباحث الى الاعتقاد بأن المتغيرات المستقلة لها قدرة عالية على تفسير التغيرات الحاصلة في المتغير التابع، وهو ما يؤكده اختبار FISHER، حيث أن إحصائية FISHER المحسوبة F_{cal} تكون عالية جدا. إلا أن عدم معنوية المعلمات المقدرة يؤكد أن اختبار معامل التحديد واختبار FISHER أعطى نتائج مضللة.

---

[1] - شيخي محمد، مرجع سبق ذكره، ص 90.

[2] - أحمد سلطان محمد، هيثم يعقوب يوسف وآخرون، مرجع سبق ذكره، ص 345، بتصرف.

ثانيا: الكشف عن مشكلة التعدد الخطي

توجد عدة اختبارات تستخدم للكشف عن مشكلة **التعدد الخطي**، منها:

1- قياس التعدد الخطي أو شرط الأعداد CONDITION NUMBERS:[1]

من خلال النموذج التالي: $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \varepsilon_t$ ، يكون لدينا:

$$\begin{cases} Var(\hat{\beta}_2) = \dfrac{\delta_\varepsilon^2}{\sum X_{2t}^2 (1 - R_2^2)} \\ Var(\hat{\beta}_3) = \dfrac{\delta_\varepsilon^2}{\sum X_{3t}^2 (1 - R_3^2)} \\ Cov(\hat{\beta}_2 . \hat{\beta}_3) = \dfrac{\delta_\varepsilon^2 \ R_1^2}{\sum X_{2t} X_{3t} (1 - R_2^2)} \end{cases}$$

حيث أن R_2^2 و R_3^2 هو مربع معامل الارتباط المتعدد بين المتغيرين المستقلين X_{2t} و X_{3t} ، بينما في حالة توسيع النموذج إلى k متغير مستقل $(k > 2)$ ، يصبح R_i^2 مربع معامل الارتباط المتعدد ما بين المتغير المستقل X_{it} وباقي المتغيرات المستقلة الأخرى. وبالتالي يمكننا استنتاج قانون عام لتباين معلمات النموذج المقدرة كمايلي:

$$Var(\hat{\beta}_i) = \frac{\delta_\varepsilon^2}{\sum X_{it}^2 (1 - R_i^2)} \qquad i = 2L \ L \ k$$

وتكون قيمة $Var(\hat{\beta}_i)$ كبيرة كلما كانت δ_ε^2 كبيرة، $\sum X_{it}^2$ صغيرة، R_i^2 كبيرة. ومنه نعرف مقياسا جديدا يسمى: "معامل تضخيم التباين VARIANCE INFLATION FACTOR (V.I.F)"، ومقياسا آخر يسمى: "شرط العدد CONDITION NUMBERS"، وهما مقياسان يحددان درجة التعدد الخطي.

ويعطى معامل تضخيم التباين بالعلاقة التالية: $V.I.F(\hat{\beta}_i) = \frac{1}{1 - R_i^2}$.

ثالثا: معالجة مشكل التعدد الخطي

عند وجود مشكلة التعدد الخطي يمكن اقتراح الحلول التالية:

- محاولة توسيع حجم العينة، وذلك بإضافة بيانات كافية عن متغيرات الظاهرة المدروسة، إذ تزداد التقديرات دقة بزيادة عدد البيانات التي تعتمد عليها عملية التقدير، نظرا لوجود علاقة عكسية بين حجم العينة وقيمة التباين، فكلما كبر حجم العينة كلما تم الحصول على معلومات إضافية تساعد على تخفيض حجم التباينات[2]. مع الاشارة إلى أن زيادة حجم العينة ببيانات جديدة لا تختلف معنويا عن البيانيات المتوفرة قد يؤدي إلى تفاقم مشكل التعدد الخطي.

---

[1]- شيخي محمد، مرجع سبق ذكره، ص ص 92-94.

[2] - حسين علي بخيت، سحر فتح الله، مرجع سبق ذكره، ص 253.

- حذف متغيرات من النموذج: عندما يكون هناك تداخل خطي بين متغيرين مستقلين، يلجأ الباحث أحيانا إلى حذف أحد المتغيرين للتخلص من هذا التداخل[1]. كذلك التخلص أو التخفيف من مشكل التعدد الخطي من خلال اللجوء إلى النظرية الاقتصادية، وما تقترحه من قيود حول بعض المعلمات.

[1] - أحمد سلطان محمد، هيثم يعقوب يوسف وآخرون، مرجع سبق ذكره، ص 408.

الارتباط الذاتي

AUTOCORRELATION

مقدمة:

يعد الارتباط الذاتي AUTOCORRELATION نوعا خاصا من أنواع الارتباطات الاعتيادية، فعند الحديث عن حالة الارتباط بين متغير تابع وآخر مستقل، فإننا نقيس ذلك بمعامل الارتباط CORRÉLATION COEFFICIENT، وعند الحديث عن درجة الارتباط بين المتغيرات المستقلة مع بعضها البعض، فإننا نستعين بمصفوفة معاملات الارتباط الجزئية PARTIAL CORRELATION COEFFICIENTS MATRIX.

أما الارتباط الذاتي الذي نحن بصدد تناوله فينحصر في العلاقة بين القيم المتتالية للمتغير العشوائي ε_t، أي درجة الارتباط بين قيمه في الفترة t والفترة $(t-1)$، أو قيمته في الفترة اللاحقة $(t+1)$، ضمن سلسلة مشاهدات هذا المتغير.

أولا: طبيعة مشكلة الارتباط الذاتي للأخطاء

يشير الارتباط الذاتي بوجه عام إلى وجود ارتباط بين القيم المشاهدة لنفس المتغير، وعادة ما يشير هذا المصطلح في نماذج الانحدار إلى وجود ارتباط بين القيم المتتالية للمتغير العشوائي. فمن بين الفرضيات الكلاسيكية للنماذج الخطية نجد فرضية استقلال الاخطاء فيما بينها، وبالتالي فمصفوفة التباين والتباين المشترك تعطى كمايلي:

$$\Omega_\varepsilon = E(\varepsilon\varepsilon') = E\left[\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ M\\ M\\ \varepsilon_n\end{pmatrix}(\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \; L \; L \; \varepsilon_n)\right] = E\begin{pmatrix}\varepsilon_1^2 & \varepsilon_1\varepsilon_2 & L & L & \varepsilon_1\varepsilon_n\\ \varepsilon_1\varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 & L & L & \varepsilon_2\varepsilon_n\\ M & M & O & & M\\ M & M & & O & M\\ \varepsilon_1\varepsilon_n & \varepsilon_2\varepsilon_n & L & L & \varepsilon_n^2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}E(\varepsilon_1^2) & E(\varepsilon_1\varepsilon_2) & L & L & E(\varepsilon_1\varepsilon_n)\\ E(\varepsilon_1\varepsilon_2) & E(\varepsilon_2^2) & L & L & E(\varepsilon_2\varepsilon_n)\\ M & M & O & & M\\ M & M & & O & M\\ E(\varepsilon_1\varepsilon_n) & E(\varepsilon_2\varepsilon_n) & L & L & E(\varepsilon_n^2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\delta_\varepsilon^2 & 0 & L & L & 0\\ 0 & \delta_\varepsilon^2 & L & L & 0\\ M & M & O & & M\\ M & M & & O & M\\ 0 & 0 & L & L & \delta_\varepsilon^2\end{pmatrix} = \delta_\varepsilon^2\begin{pmatrix}1 & 0 & L & L & 0\\ 0 & 1 & L & L & 0\\ M & M & O & & M\\ M & M & & O & M\\ 0 & 0 & L & L & 1\end{pmatrix} = \delta_\varepsilon^2 I_n$$

في حالة عدم تحقق هذه الفرضية فهذا يدل على وجود ارتباط ذاتي للأخطاء، فمصفوفة التباين والتباين المشترك للأخطاء $\Omega_\varepsilon = E(\varepsilon\varepsilon') \neq \delta_\varepsilon^2 I_n$، لا تتضمن الصفر خارج قطرها، وكنتيجة لذلك تكون المقدرات متحيزة وتباينها ليس هو الأدنى.

1- أشكال الارتباط الذاتي:

يمكن تصنيف الارتباط الذاتي إلى عدة أنواع، نذكر منها ما يأتي:

1-1- **الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى 'AR(1)' FIRST ORDER AUTOCORRELATION SCHEME:** عندما يكون الارتباط الذاتي للخطأ العشوائي أو المتغير العشوائي من الدرجة الأولى، فإنه يكون غير مستقل ويتبع النموذج التالي:

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$$

حيث: ρ معلمة تقيس درجة الارتباط، و $-1 \leq \rho \leq 1$.

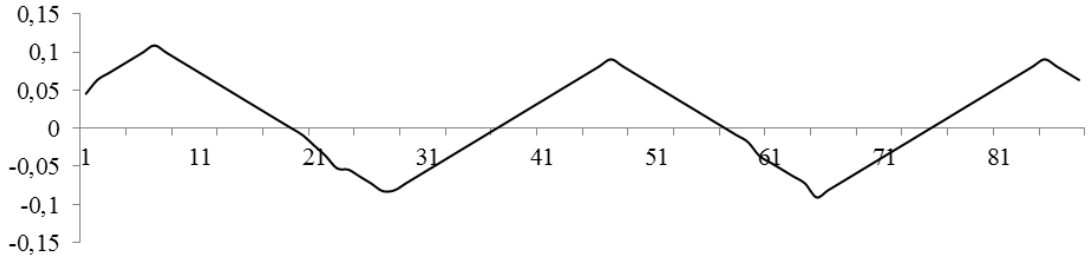
2-1- **الارتباط الذاتي من الدرجة m 'AR(M)' M ORDER AUTOCORRELATION SCHEME:** في هذه الحالة يرتبط حد الخطأ العشوائي للفترة الحالية t بالحدود العشوائية للفترات السابقة حتى الفترة m، وهو ما يمكن توضيحه بالصيغة التالية:

$$\varepsilon_t = \rho_1\varepsilon_{t-1} + \rho_2\varepsilon_{t-2} + \rho_3\varepsilon_{t-3} + L \; L + \rho_m\varepsilon_{t-m} + u_t$$

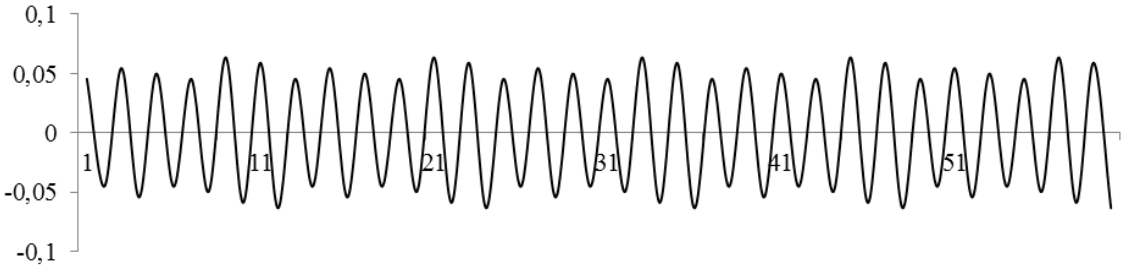
3-1- الارتباط الذاتي الموجب والارتباط الذاتي السالب Positive Autocorrelation and Negative Autocorrelation:

وفقا لهذا التصنيف يصنف الارتباط الذاتي إلى موجب وسالب حسب إشارة القيم المتتالية للمتغير العشوائي كمايلي:

- **الارتباط الذاتي الموجب Positive Autocorrelation:** يحدث هذا النوع في حالة ما أخذت القيم المتتالية للمتغير العشوائي نفس الإشارة، فقد تكون موجبة لفترات وقد تكون سالبة لفترات أخرى.



- **الارتباط الذاتي السالب Negative Autocorrelation:** يحدث هذا النوع في حالة ما أخذت القيم المتتالية للمتغير العشوائي إشارات متناوبة، فقد تكون موجبة لفترة وتكون سالبة في الفترة الموالية.



2- أسباب حدوث الارتباط الذاتي:

- حذف بعض المتغيرات التفسيرية ذات القيم المرتبطة ذاتيا، فمن المعروف أن حذف بعض المتغيرات من نموذج الانحدار يترتب عليه ما يسمى بخطأ الحذف، وهذا ينعكس بدوره في قيم الحد العشوائي[1]. فإذا افترضنا أن المتغير التابع Y_t مرتبط بالمتغيرين X_{2t} و X_{3t} ، وأننا اسقطنا بطريق الخطأ المتغير X_{3t} ولم ندرجه في النموذج، فسيتم إلتقاط تأثير المتغير X_{3t} بحد الخطأ أو المتغير العشوائي ε_t ، خاصة اذا كان المتغير X_{3t} يمثل سلسلة زمنية عبارة عن امتداد لماضيها القريب، أي X_{3t} يعتمد على X_{3t-1} و X_{3t-2} ، هذا ما يؤدي الى ارتباط محتوم بين ε_t و ε_{t-1} و ε_{t-2} .
- سوء توصيف النموذج (Misspecification)، كأن يرتبط المتغير التابع Y_t بالمتغير X_{2t} بعلاقة تربيعية من الشكل: $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t}^2 + \varepsilon_t$ ، في حين أننا حددنا وقدرنا نموذجا خطيا من الشكل: $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \varepsilon_t$ فإننا سنحصل على حدود خطأ توصيف خطي يعتمد في الأساس على X_{2t}^2 ، فإذا زاد X_{2t} أو تناقص خلال الزمن فإن ε_t ستتصرف بنفس التصرف، محدثة ارتباطا ذاتيا.[2]
- عدم دقة بيانات السلاسل الزمنية، أي الأخطاء المنهجية في القياس.

---

[1] - أحمد سلطان محمد، هيثم يعقوب يوسف وآخرون، مرجع سبق ذكره، ص 67.

[2] - خالد محمد السواعي، مرجع سبق ذكره، ص 279.

ثانيا: تقدير معامل الارتباط الذاتي:

هناك العديد من الطرق لتقدير معامل الارتباط الذاتي، نذكر من أهمها:

1- **طريقة COCHRANE-OREUTTE:** قدم كلل من COCHRANE وOREUTTE بحثا مشتركا سنة 1949 حول طريقة تقدير معامل الارتباط الذاتي ρ ، حيث اقترحا أن يتم تقديره وفق العلاقة التالية:[1]

$$\hat{\rho} = \frac{\sum e_t \cdot e_{t-1}}{\sum e_{t-1}^2}$$

حيث: e: تمثل بواقي تقدير النموذج، أي: $e_t = Y_t - \hat{Y}_t$ و $e_{t-1} = Y_{t-1} - \hat{Y}_{t-1}$.

2- **طريقة DURBIN-WATSON:** حسب هذه الطريقة يتم تقدير معامل الارتباط الذاتي ρ من خلال احصائية DURBIN-WATSON، والتي يرمز لها عادة بالرمز DW ، والتي تعطى بالعلاقة التالية:

$$DW = 2 \cdot (1 - \hat{\rho})$$

وبالتالي يمكن تقدير معامل الارتباط الذاتي كما يلي:

$$\hat{\rho} = 1 - \frac{DW}{2}$$

3- **طريقة THEIL-NAGAR:** وهي طريقة مطورة لطريقة DURBIN-WATSON في تقدير معامل الارتباط الذاتي ρ ، إذ أخذ الباحثان THEIL وNAGAR في بحثهما سنة 1961 عدد المتغيرات المستقلة k وحجم العينة n في تقدير هذا المعامل، من خلال الصيغة التالية:

$$\hat{\rho} = \frac{n^2\left(1 - \frac{DW}{2}\right) + (k+1)^2}{n^2 - (k+1)^2}$$

ثالثا: آثار مشكلة الارتباط الذاتي للأخطاء:

تتمثل أهم الآثار الناتجة عن مشكل الارتباط الذاتي للأخطاء فيمايلي:[2]

- لا يؤثر وجود الارتباط الذاتي على تحيز المعلمات المقدرة بطريقة المربعات الصغرى العادية (OLS)، حيث تبقى هذه المقدرات مقدرات غير متحيزة. كما تبقى متسقة، إلا أنها تفقد خاصية الكفاءة.
- ينتج عن مشكل الارتباط الذاتي صغر حجم الأخطاء المعيارية للمعلمات المقدرة بطريقة (OLS)، ما يؤدي إلى:
  - تضخيم معنوية المعلمات المقدرة، المبالغة في قيمة معامل التحديد.
  - عدم دقة مجالات الثقة للمعلمات المقدرة، لإعتمادها على الأخطاء المعيارية في حسابها.
  - عدم صلاحية اختباري STUDENT وFISHER، كون تباين المتغير العشوائي المقدر يكون متحيزا نحو الأسفل، وبالتالي تكون تباين المتغير العشوائي أقل من تباينه الفعلي.

---

[1] - شيخي محمد، مرجع سبق ذكره، ص 105.

[2] - أحمد سلطان محمد، هيثم يعقوب يوسف وآخرون، مرجع سبق ذكره، ص 68.

- يصبح التنبؤ غير دقيق، لاعتماده على التباين المقدر للمتغير العشوائي، حيث يمكن الحصول على تنبؤات أكثر دقة باستخدام طرق أخرى في تقدير النموذج، كطريقة المربعات الصغرى المعممة METHOD OF GENERALIZED LEAST SQUARE (GLS).
- تصبح التقديرات حساسة للتقلب من عينة إلى أخرى.

رابعا: الكشف عن مشكل الارتباط الذاتي للأخطاء:

للكشف عن وجود هذا المشكل يتعين علينا التمييز بين درجات الارتباط الذاتي كما يلي:

1- اختبارات الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى:

للكشف عن الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى هناك العديد من الاختبارات، لعل أهمها ما يلي:

1-1- اختبار DURBIN-WATSON:

يعتبر هذا الاختبار أكثر الاختبارات استخداما في مختلف العينات، حيث توجد اختبارات أخرى أقوى من اختبار DW من الناحية الاحصائية، إلا أنها تكتسب هذه القوة في حالة العينات كبيرة الحجم فقط، لذلك يفضل اختبار DW على الكثير من الاختبارات الأخرى، فضلا على أنه سهل وبسيط الفكرة والتطبيق، مع الاشارة إلى أنه مخصص للكشف عن الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى فقط.

فإذا كان لدينا النموذج الخطي المتعدد التالي: $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + L\ L + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t$ ، والذي يعاني من مشكل ارتباط ذاتي للأخطاء من الدرجة الأولى، حسب الشكل التالي: $\varepsilon_t = \rho \cdot \varepsilon_{t-1} + \mu_t$.

حيث: ρ: معامل الارتباط الذاتي للأخطاء

μ_t: متغير عشوائي، من خصائصه: $E(\mu_t) = 0 \quad . \quad V(\mu_t) = \delta_\mu^2 \quad . \quad E(\mu_i \mu_j) = 0 \quad \forall i \neq j$

فإن اختبار DW يستخدم لاختبار ثلاث فروض كمايلي:

- وجود ارتباط ذاتي موجب، فيأخذ الاختبار الشكل التالي:

$$\begin{cases} H_0 : \rho = 0 \\ H_1 : \rho > 0 \end{cases}$$

- وجود ارتباط ذاتي سالب، فيأخذ الاختبار الشكل التالي:

$$\begin{cases} H_0 : \rho = 0 \\ H_1 : \rho < 0 \end{cases}$$

- وجود ارتباط ذاتي موجب أو سالب، فيأخذ الاختبار الشكل التالي:

$$\begin{cases} H_0 : \rho = 0 \\ H_1 : \rho \neq 0 \end{cases}$$

وتنحصر خطوات هذا الاختبار في النقاط التالية:

- تقدير معلمات النموذج الخطي بطريقة المربعات الصغرى العادية.
- ايجاد بواقي التقدير كمايلي: $e_t = Y_t - \hat{Y}_t$.
- حساب الإحصائية DW التي تعطى بالعلاقة التالية: $DW = \sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2 \Big/ \sum_{t=1}^{n} e_t^2$.

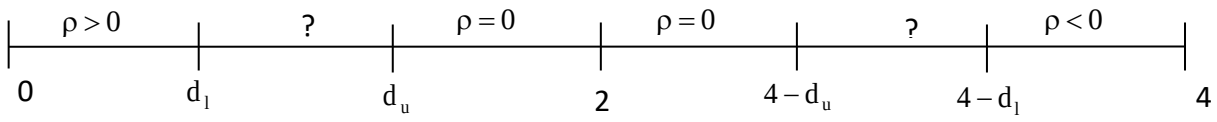
$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t^2 + e_{t-1}^2 - 2e_t e_{t-1})}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} = \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t^2 + \sum_{t=2}^{n} e_{t-1}^2 - 2\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

$$\approx 2 - \frac{2\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

$$\approx 2 - 2\rho \approx 2(1-\rho)$$

بعد حساب DW نقرنها مع القيمتين المجدولتين، d_l التي تمثل الحد الأدنى لانعدام الارتباط الذاتي، و d_u التي تمثل الحد الأقصى لانعدام الارتباط الذاتي، وذلك حسب عدد المشاهدات n ، وعدد المتغيرات التفسيرية في النموذج عند درجة معنوية 5%.

ويتم قبول ورفض الفرضيتين حسب المخطط التالي:[1]



قيمة DW الوسطية هي 2 وعندها ينعدم الارتباط الذاتي، أي: $\rho = 0$.

ويتم قبول ورفض H_0 حسب الحالات التالية:

$0 < DW < d_l$ وجود ارتباط ذاتي موجب.

$d_l < DW < d_u$ مجال غير محسوم، هناك شك في وجود أو عدم وجود ارتباط ذاتي.

$d_u < DW < 4 - d_u$ عدم وجود ارتباط ذاتي.

$4 - d_u < DW < 4 - d_l$ مجال غير محسوم، هناك شك في وجود أو عدم وجود ارتباط ذاتي.

$4 - d_l < DW < 4$ وجود ارتباط ذاتي سالب.

شروط استخدام اختبار DURBIN-WATSON:

هناك عدد من الشروط الواجب توفرها ليكون استخدام هذا الاختبار صحيحا، وهي:[2]

---

[1] - Régis Bourbonnais, Op cit, P129.

[2] - أحمد سلطان محمد، هيثم يعقوب يوسف وآخرون، مرجع سبق ذكره، ص96.

- الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى فقط، والذي يأخذ الشكل التالي: $\varepsilon_t = \rho \cdot \varepsilon_{t-1} + \mu_t$ ، أي لا يصلح للكشف عن الارتباط الذاتي من درجة أعلى من الدرجة الأولى.
- لابد أن يحتوى النموذج على حد ثابت، كأن يأخذ النموذج الشكل التالي:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + L\ L\ + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t$$

أما إذا كان النموذج لا يحتوي على حد ثابت، فيتعين إعادة تقديره بوجود هذا الحد، للتأكد من وجود أو عدم وجود الارتباط الذاتي للأخطاء.

- أن لا يظهر المتغير التابع بفترات إبطاء في جملة المتغيرات المستقلة.

مثال: لتكن لديك البيانات التالية والخاصة بتطور كل من الناتج المحلي الاجمالي و الانفاق العام والكتلة النقدية بمفهومها الواسع في الجزائر بالمليار دج خلال الفترة 1990-2018 كمايلي:

السنة	الناتج المحلي الاجمالي	الانفاق العام	الكتلة النقدية	السنة	الناتج المحلي الاجمالي	الانفاق العام	الكتلة النقدية
1990	472.7	136.49	343.005	2005	7563.6	2052.00	4070.4
1991	752.3	212.10	415.27	2006	8520.6	2428.49	4827.60
1992	918.8	420.13	515.90	2007	9408.29	3108.5	5994.6
1993	1005.4	476.62	627.427	2008	11043.7	4175.7	6956
1994	1274	566.32	723.514	2009	10034.3	4246.3	7173.1
1995	1743.8	759.61	799.562	2010	12049.5	4466.89	8162.8
1996	2256.6	724.60	915.058	2011	14384.8	5731.4	9929.20
1997	2243.9	845.19	1081.518	2012	16643.8	7058.1	11015.1
1998	2444.2	875.73	1592.461	2013	17242.5	6024.2	11941.5
1999	2825.6	961.68	1789.35	2014	17228.6	6995.7	13686.8
2000	3698.7	1178.12	2022.5	2015	16702.1	7656.3	13704.5
2001	3754.8	1321.02	2473.5	2016	17406.8	7297.4	13816.3
2002	4023.8	1550.64	2901.5	2017	18876.6	7389.3	14974.6
2003	4700.39	1690.19	3354.9	2018	21041.103	7258.9	15687.33
2004	6150.4	1891.79	3738.037				

المصدر: مديرية التجهيز بوزارة المالية وبنك الجزائر

وبافتراض أننا قدرنا النموذج الخطي المتعدد التالي:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \varepsilon_t$$

حيث: Y_t : الناتج المحلي الاجمالي، X_{2t} : الانفاق العام، X_{3t} : الكتلة النقدية بمفهومها الواسع

باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية كانت نتائج تقدير هذا النموذج كمايلي:

$$\hat{Y}_t = 772.508 + 0.5961 \cdot X_{2t} + 0.9722 \cdot X_{3t}$$
$$(2.9637) \quad (3.9049) \quad (4.1450)$$
$$n = 29 \qquad R^2 = 0.9832 \qquad F_{cal} = 764.40$$

المطلوب: اختبر وجود الارتباط الذاتي للأخطاء باستخدام اختبار DURBIN-WATSON عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$.

- حساب القيم المقدرة وبواقي التقدير:

السنة	Y_t	$\hat{Y}_t$	e_t	$e_t - e_{t-1}$	$(e_t - e_{t-1})^2$	e_t^2
1990	472,7	800,25	-327,55			107289,00
1991	752,3	820,93	-68,63	258,91	67039,10	4710,19
1992	918,8	197,00	721,79	790,42	624772,23	520987,23
1993	1005.4	501.43	503.96	-217.83	47451.80	253975.78
1994	1274	847.91	426.08	-77.87	6064.85	181546.63
1995	1743.8	1343.68	400.11	-25.96	674.20	160093.97
1996	2256.6	2025.41	231.18	-168.93	28538.01	53446.72
1997	2243.9	2768.45	-524.55	-755.74	571144.34	275158.42
1998	2444.2	2813.43	-369.23	155.31	24123.31	136337.17
1999	2825.6	3296.56	-470.96	-101.72	10348.36	221808.55
2000	3698.7	4045.52	-346.82	124.14	15412.08	120284.21
2001	3754.8	4202.28	-447.48	-100.66	10133.58	200243.58
2002	4023.8	4264.05	-240.25	207.22	42942.85	57724.51
2003	4700.4	4906.67	-206.27	33.98	1154.89	42549.58
2004	6150.4	6172.47	-22.07	184.20	33930.99	487.16
2005	7563.6	7232.53	331.06	353.13	124706.07	109604.46
2006	8520.6	8051.63	468.96	137.89	19016.08	219927.69
2007	9408.3	9002.90	405.39	-63.57	4041.44	164342.78
2008	11043.7	11208.87	-165.17	-570.56	325545.95	27282.51
2009	10034.3	10474.00	-439.70	-274.53	75369.17	193343.72
2010	12049.5	11895.95	153.54	593.25	351955.08	23577.40
2011	14384.8	14919.75	-534.95	-688.50	474033.13	286172.88
2012	16643.8	18604.92	-1961.12	-1426.17	2033963.2	3845999.94
2013	17242.5	16366.22	876.27	2837.39	8050810.45	767854.19
2014	17228.6	17718.09	-489.49	-1365.76	1865316.9	239603.54
2015	16702.1	18563.00	-1860.90	-1371.40	1880757.8	3462950.24
2016	17406.8	16410.38	996.41	2857.31	8164228.09	992834.79
2017	18876.6	18000.88	875.71	-120.69	14568.16	766872.04
2018	21041.10	19828.85	1212.24	336.536392	113256.74	1469546.9
$\sum$	**236411.712**	**236411.712**	**00.00**		**24991799**	**14706505.9**

- حساب الإحصائية DW التي تعطى بالعلاقة التالية:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} = \frac{24991799}{14706505\ .9} = 1.6993$$

ولدينا: عدد المشاهدات في النموذج: $n = 29$ ، عدد المتغيرات المستقلة في النموذج: $k = 2$

من جدول DURBIN-WATSON نجد القيم الحرجة d_l و d_u عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$ كمايلي:

$$d_u = 1.56 \text{ و } d_l = 1.27$$

فنلاحظ أن:

$$(d_u = 1.56) < (DW = 1.6993) < (4 - d_u = 2.44)$$

وهو ما يدل على عدم وجود ارتباط ذاتي من الدرجة الأولى بين الأخطاء.

2-1- اختبار DURBIN'S H TEST لإبطاء المتغير التابع:

قلنا سابقا أن اختبار DW غير قابل للتطبيق عندما يتضمن النموذج إبطاء للمتغير التابع كمتغير تفسيري، فإذا كان النموذج المراد اختباره يأخذ الشكل التالي:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + L\ L\ + \beta_k X_{kt} + \gamma Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

فإنه لا يمكننا تطبيق اختبار DW، وعليه صمم DURBIN (1970) إحصائية اختبار يمكن استخدامها لمثل هذا النموذج، وتأخذ هذه الاحصائية الشكل التالي:[1]

$$h = \left(1 - \frac{DW}{2}\right)\sqrt{\frac{n}{1 - n\hat{\delta}_{\hat{\gamma}}^2}}$$

حيث: n : عدد المشاهدات، DW : إحصائية DURBIN-WATSON، $\hat{\delta}_{\hat{\gamma}}^2$: التباين المقدر لمعلمة إبطاء المتغير التابع، مع ملاحظة أن هذه الإحصائية في العينات الكبيرة تتبع التوزيع الطبيعي، وتشمل خطوات اختبار H TEST مايلي:

- تقدير النموذج الخطي باستخدام OLS ثم الحصول على البواقي وحساب الاحصائية DW.
- شكل الاختبار: يكون كمايلي:

$$\begin{cases} H_0 : \rho = 0 \\ H_1 : \rho \neq 0 \end{cases}$$

- حساب الاحصائية H-STATISTICS من العلاقة: $h = \left(1 - \frac{DW}{2}\right)\sqrt{\frac{n}{1 - n\hat{\delta}_{\hat{\gamma}}^2}}$.

[1] - خالد محمد السواعي، مرجع سبق ذكره، ص 294.

- **قرار الاختبار:** من خلال مقارنة الاحصائية h بالقيم الحرجة (في العينات الكبيرة وعند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$ تكون القيمة الحرجة $Z = \pm 1.96$):
  - ✓ نرفض H_0 إذا كان $|h| \geq 1.96$ ، أي وجود ارتباط ذاتي بين الأخطاء.
  - ✓ نرفض H_1 إذا كان $|h| < 1.96$ ، أي عدم وجود ارتباط ذاتي بين الأخطاء.

مثال: من البيانات السابقة والخاصة بتطور كل من الناتج المحلي الاجمالي و الانفاق العام والكتلة النقدية بمفهومها الواسع في الجزائر بالمليار دج خلال الفترة 1990-2018، وبافتراض أننا قدرنا النموذج الخطي المتعدد التالي:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \gamma Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

حيث: Y_t : الناتج المحلي الاجمالي، X_{2t} : الانفاق العام، X_{3t} : الكتلة النقدية بمفهومها الواسع، Y_{t-1} : إبطاء الناتج المحلي الاجمالي بفترة واحدة.

باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية كانت نتائج تقدير هذا النموذج كمايلي:

$$\hat{Y}_t = \underset{(3.865)}{546.069} + 0.2386 \cdot X_{2t} + 0.364 \cdot X_{3t} + 0.646 \cdot Y_{t-1}$$

$$n = 28 \qquad R^2 = 0.9872 \qquad F_{cal} = 619.40 \qquad DW = 1.2847$$

وعلى اعتبار أن النموذج مقبول اقتصاديا واحصائيا.

المطلوب: اختبر وجود الارتباط الذاتي للأخطاء باستخدام اختبار DURBIN'S H TEST عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$

- شكل الاختبار: يكون كمايلي:

$$\begin{cases} H_0 : \rho = 0 \\ H_1 : \rho \neq 0 \end{cases}$$

- حساب الاحصائية H-STATISTICS من العلاقة: $h = \left(1 - \frac{DW}{2}\right)\sqrt{\frac{n}{1 - n\hat{\delta}_{\hat{\gamma}}^2}}$.

لدينا: $\delta_{\hat{\gamma}}^2 = ?$ $\qquad DW = 1.2847 \qquad n = 28$

ولدينا إحصائية STUDENT المحسوبة للمعلمة $\hat{\gamma}$ تساوي: 3.865

$$St_{cal} = \left|\frac{\hat{\gamma}}{\hat{\delta}_{\hat{\gamma}}}\right| = \left|\frac{0.646}{\hat{\delta}_{\hat{\gamma}}}\right| = 3.865 \Rightarrow \hat{\delta}_{\hat{\gamma}} = \frac{0.646}{3.865} = 0.1671 \Rightarrow \hat{\delta}_{\hat{\gamma}}^2 = (0.1671)^2 = 0.0279$$

وبالتالي يمكن حساب الاحصائية H-STATISTICS كمايلي:

$$h=\left(1-\frac{DW}{2}\right)\sqrt{\frac{n}{1-n\hat{\delta}_{\hat{\gamma}}^2}}=\left(1-\frac{1.2847}{2}\right)\sqrt{\frac{28}{1-28(0.0279)}}=0.3576\sqrt{\frac{28}{0.2188}}=0.3576(11.31)=4.0453$$

- **القرار:** من خلال مقارنة الاحصائية h بالقيمة الحرجة عند مستوى معنوية $\alpha=5\%$ نجد: $|h|\geq 1.96$ ، وبالتالي نرفض H_0 ، أي وجود ارتباط ذاتي بين الأخطاء.

2- اختبارات الارتباط الذاتي من درجة أعلى من الدرجة الأول:

من بين الاختبارات التي تستخدم للكشف عن الارتباط الذاتي لدرجة أعلى من الدرجة الأولى نجد مايلي:

2-1- اختبار BREUSCH-GODFREY:

نظرا للعيوب الناتجة عن اختبار DURBIN-WATSON طور كل من BREUSCH (1978) و GODFREY (1978) اختبار LM ، والذي يتميز بكونه يسمح باختبار الارتباط الذاتي لدرجات مختلفة، حيث أن الارتباط الذاتي من الدرجة m يمكن صياغته وفق العلاقة التالية:

$$\varepsilon_t=\rho_1\cdot\varepsilon_{t-1}+\rho_2\cdot\varepsilon_{t-2}+\text{L L}+\rho_m\cdot\varepsilon_{t-m}+\mu_t$$

حيث: $/i=1\text{L L}\ m$ ρ_i : معاملات الارتباط الذاتي للأخطاء.

μ_t : متغير عشوائي، من خصائصه: $E(\mu_t)=0$. $V(\mu_t)=\delta_\mu^2$ $E(\mu_i\mu_j)=0\quad\forall i\neq j$

بالتعويض في النموذج الخطي المتعدد نجد:

$$Y_t=\beta_1+\beta_2\cdot X_{2t}+\beta_3\cdot X_{3t}+\text{L L}+\beta_k\cdot X_{kt}+\rho_1\cdot\varepsilon_{t-1}+\rho_2\cdot\varepsilon_{t-2}+\text{L L}+\rho_m\cdot\varepsilon_{t-m}+\mu_t$$

وتكون فرضية استقلالية الأخطاء (عدم وجود ارتباط ذاتي) كمايلي:

$$H_0:\rho_1=\rho_2=\text{L L}=\rho_m=0\qquad/i=1\text{L L}\ m$$

بينما الفرضية البديلة تكون كمايلي:

$$H_1:\exists\ i\ \ /\ \ \rho_i\neq 0\qquad i=1\text{L L}\ m$$

لإجراء هذا الاختبار نتبع بالخطوات التالية:

- تقدير النموذج الخطي المتعدد بطريقة OLS، ثم حساب بواقي التقدير:

$$Y_t=\beta_1+\beta_2X_{2t}+\beta_3X_{3t}+\text{L L}+\beta_kX_{kt}+\mu_t$$
$$e_t=Y_t-\hat{Y}_t=Y_t-\hat{\beta}_1-\hat{\beta}_2X_{2t}-\hat{\beta}_3X_{3t}-\text{L L}-\hat{\beta}_kX_{kt}$$

- تقدير النموذج التالي بطريقة OLS، وحساب معامل التحديد R^2

$$e_t=\beta_1+\beta_2\cdot X_{2t}+\beta_3\cdot X_{3t}+\text{L L}+\beta_k\cdot X_{kt}+\rho_1\cdot e_{t-1}+\rho_2\cdot e_{t-2}+\text{L L}+\rho_m\cdot e_{t-m}+\mu_t$$

- حساب الاحصائية LM (LAGRANGE MULTIPLLER):

$$LM = n \cdot R^2$$

الاحصائية LM تتبع توزيع khi – deux بدرجة حرية m ، أي: $LM \rightarrow \chi^2_m$.

- **القرار:**

إذا كانت: $LM \geq \chi^2_m$ عند مستوى معنوية معين، فإننا نقبل الفرضية $H_1 : \exists\, i \quad / \quad \rho_i \neq 0$ ، أي وجود ارتباط ذاتي.

إذا كانت: $LM < \chi^2_m$ عند مستوى معنوية معين، فإننا نقبل الفرضية $H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \text{L} \; \text{L} = \rho_m = 0$ ، أي عدم وجود ارتباط ذاتي.

<u>مثال</u>: من نفس البيانات السابقة والنموذج المقدر سابقا، والذي كان كمايلي:

$$\hat{Y}_t = 772.508 + 0.5961 \cdot X_{2t} + 0.9722 \cdot X_{3t}$$
$$(2.9637) \quad (3.9049) \quad (4.1450)$$
$$n = 29 \qquad R^2 = 0.9832 \qquad F_{cal} = 764.40$$

حيث: Y_t : الناتج المحلي الاجمالي، X_{2t} : الانفاق العام، X_{3t} : الكتلة النقدية بمفهومها الواسع.

وعلى اعتبار أن النموذج مقبول اقتصاديا واحصائيا.

<u>المطلوب:</u> اختبر وجود ارتباط ذاتي من الدرجة الثانية باستخدام اختبار **BREUSCH-GODFREY.**

- تقدير النموذج التالي بطريقة OLS، وحساب معامل التحديد R^2 :

$$e_t = \beta_1 + \beta_2 \cdot X_{2t} + \beta_3 \cdot X_{3t} + \rho_1 \cdot e_{t-1} + \rho_2 \cdot e_{t-2} + \mu_t$$

وكانت نتائج التقدير كما يلي:

$$\hat{e}_t = -6.964 - 0.029 \cdot X_{2t} + 0.020 \cdot X_{3t} + 0.843 \cdot e_{t-1} - 0.332 \cdot e_{t-2}$$
$$n = 29 \qquad R^2 = 0.4396 \qquad F_{cal} = 4.708$$

- حساب الاحصائية LM (LAGRANGE MULTIPLLER):

$$LM = n \cdot R^2 = 29 \cdot (0.4396) = 12.74$$

- القرار: نلاحظ أن: $(LM = 12.74) \geq (\chi^2_2 = 5.9915)$ عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$ ، وبالتالي نقبل الفرضية $H_1 : \exists\, i \quad / \quad \rho_i \neq 0 \quad i = 1.2$ ، أي وجود ارتباط ذاتي من الدرجة الثانية.

عـدم ثبـات التبـاين

HETEROSCEDASTICITY

مقدمة:

رأينا في المحاضرات السابقة أن إحدى الفرضيات الأساسية التي تقوم عليها OLS في تقدير النماذج الخطية هي ثبات تباين المتغير العشوائي (تجانس التباين HOMOSCEDASTICITY) لجميع المشاهدات، أي:

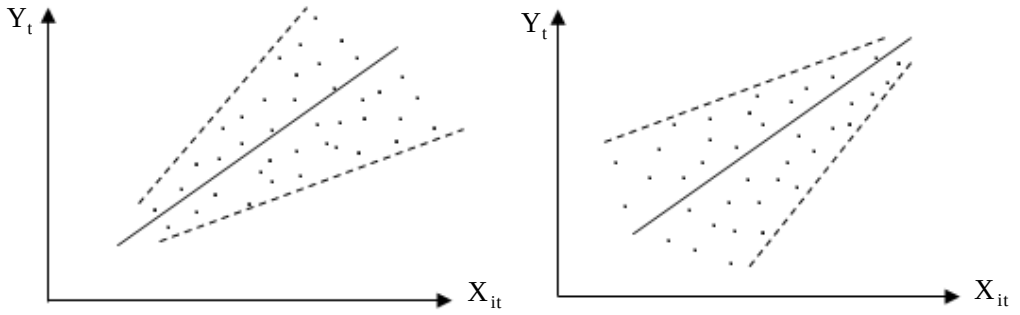
$$E(\varepsilon\varepsilon') = \delta_\varepsilon^2 I_n \qquad \text{و} \qquad V(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = \delta_\varepsilon^2 \qquad \forall t$$

في الواقع العملي فإن تحقق هذه الفرضية مستبعد في عديد الدراسات، حيث يكون التباين غير ثابت، بل يختلف لكل مشاهدة من مشاهدات العينة، فتصبح لدينا قيم مختلفة وغير ثابتة لتباينات المتغير العشوائي، وبالتالي فإن قطر مصفوفة التباين والتباين المشترك للمتغير العشوائي يحتوي على قيم مختلفة وغير ثابتة: $E(\varepsilon\varepsilon') = \delta_i^2 I_n$.

غالبا ما تحدث هذه المشكلة في النماذج التي تعتمد على البيانات المقطعية CROSS-SECTION، وفي البيانات التي تعرف تباينا كبيرا في قيمها، مما يؤدي إلى تفاوت تباين المتغير العشوائي، بحيث تارة يكون كبيرا وتارة أخرى يصبح صغيرا. فمن الحالات التي يمكن أن تصادف هذه المشكلة بيانات الانفاق الاستهلاكي للأسر، حيث أن تباين الخطأ الخاص بالإنفاق الاستهلاكي لأسر الدخل المرتفع عادة ما يكون أكبر عنه بالنسبة لتباين الخطأ الخاص بالإنفاق الاستهلاكي للأسر ذات الدخل المنخفض، ذلك لأن الأسر مرتفعة الدخل تتمتع بمرونة كبيرة في الانفاق، أما الأسر ذات الدخول المنخفضة فإن انفاقها الاستهلاكي يقع عادة ضمن حدود ضيقة. وهو ما يعني أن التشتت ومن ثم التباين عند قيم الدخل X_i الكبيرة يكون أكبر من التشتت والتباين عند قيم الدخل X_i الصغيرة، وبالتالي فإن فرضية تجانس وثبات تباين المتغير العشوائي تصبح غير محققة.

أولا: طبيعة مشكلة عدم تجانس التباين

تتمثل مشكلة عدم ثبات التباين (عدم تجانس التباين) في تغير تباين المتغير العشوائي مع تغير قيم المتغير المستقل (المفسر)، وفي هذه الحالة يأخذ شكل الانتشار أحد الأوضاع التالية:

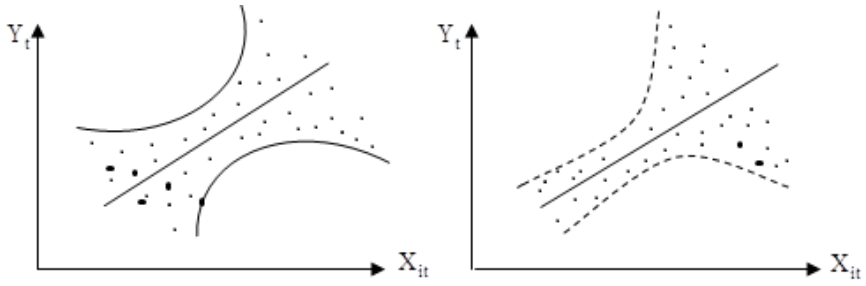


1. تناقص تباين المتغير العشوائي 2. تزايد تباين المتغير العشوائي

نلاحظ من الشكل (1) أن تغير المتغير المستقل X_{it} يؤدي إلى تغير المتغير التابع Y_t ، الأمر الذي يؤدي إلى تغير تباين المتغير العشوائي، حيث يتناقص تباين المتغير العشوائي مع تزايد قيمة المتغير المستقل بصورة منتظمة، ومنه يمكننا القول أن هناك علاقة خطية عكسية بين المتغير المستقل وتباين المتغير العشوائي. أما الشكل (2) فيبين أن تباين المتغير العشوائي يزداد مع زيادة قيمة المتغير المستقل بصورة منتظمة أيضا، لذلك فإن العلاقة بين المتغير المستقل وتباين المتغير العشوائي تكون خطية طردية، هذه العلاقة الخطية بين المتغير المستقل وتباين المتغير المستقل يمكن التعبير عنها بالصيغة التالية:

$$\delta^2_{\varepsilon_t} = \alpha_0 + \alpha_1 X_{it} + w_t$$

وقد تكون العلاقة بين المتغير المستقل وتباين المتغير العشوائي غير خطية، مثلما هو موضح في الشكلين التاليين:



3. تزايد تباين م غ غير الخطي 4. تناقص ثم تزايد تباين م ع غير الخطي

نلاحظ من الشكل (3) أن العلاقة غير خطية بين المتغير المستقل وتباين المتغير العشوائي، حيث يزداد تباين المتغير العشوائي بمعدل متزايد مع زيادة المتغير العشوائي، ويمكن تمثيل هذه العلاقة بالصيغة التالية:

$$\delta^2_{\varepsilon_t} = \alpha_0 \cdot X_{it}^{\alpha_1} + e^{w_t}$$

ويبين الشكل (4) أن العلاقة بين المتغير المستقل وتباين المتغير العشوائي علاقة غير خطية، ففي المرحلة الأولى ومع تزايد المتغير المستقل يتناقص تباين المتغير العشوائي، بينما في المرحلة الثانية يعاود الزيادة مع تزايد المتغير المستقل، حيث يمكن تمثيل هذه العلاقة كما يلي:

$$\delta^2_{\varepsilon_t} = \alpha_0 + \alpha_1 X_{it} + \alpha_3 X^2_{it} + w_t$$

إذا كانت فرضية ثبات أو تجانس التباين غير محققة، فإن مصفوفة التباين -التباين المشترك للأخطاء تختلف عن $\delta^2_\varepsilon I_n$ ، حيث يمكن كتابتها كما يلي:

$$E(\varepsilon\varepsilon') = \begin{pmatrix} \delta^2_{\varepsilon_1} & 0 & L & 0 \\ 0 & \delta^2_{\varepsilon_2} & L & 0 \\ M & M & O & M \\ 0 & 0 & L & \delta^2_{\varepsilon_n} \end{pmatrix}$$

من الملاحظ أن تباينات الأخطاء ليست ثابتة على القطر الأول، وبالتالي تباين الأخطاء مرتبط بقيم المتغير المستقل.

1- أسباب مشكلة عدم ثبات التباين:

من أهم أسباب هذه المشكلة نذكر:[1]

- وجود علاقة ذات اتجاهين بين المتغيرات المستقلة، خاصة في النماذج التي تعرف بنماذج المعادلات الآنية.

[1] - عبد القادر محمد عبد القادر عطية، ص499.

- استخدام البيانات المقطعية بدلا من بيانات السلاسل الزمنية.

- استخدام بيانات جزئية بدلا من البيانات التجميعية، فعند استخدام بيانات تجميعية تختفي الاختلافات بين المفردات، حيث يلغي بعضها البعض، فلا يكون هناك تشتت للقيم بدرجة كبيرة، أما في حالة البيانات الجزئية كتلك المتاحة عن الأفراد أو المنشئات الفردية، فعادة ما يكون التشتت كبيرا بين القيم للاختلافات الكبيرة بين سلوك المفردات.

- كثير من المتغيرات المستقلة والغير مدرجة بالنموذج تميل إلى التغير في نفس اتجاه المتغيرات المستقلة، ما يعني زيادة تشتت المشاهدات (الأخطاء) حول خط الانحدار، أي اختلاف التباين.

- تحسن أساليب جمع البيانات يقلل من تباين الأخطاء، حيث أن استعمال هذه الأساليب الحديثة ينتج عنه بيانات دقيقة وواقعية تقلل من الأخطاء.

2- آثار مشكلة عدم ثبات التباين:

إذا كان المتغير العشوائي ε_t معروفا وتباينه غير ثابت، فأننا نستطيع تلخيص مختلف آثار هذه المشكلة على مقرات OLS في النقاط التالية:[1]

- تبقى مقدرات OLS غير متحيزة UNBIASED ومتسقة CONSISTENT، لأنه لا يوجد ارتباط بين أي متغير مستقل والمتغير العشوائي، والنموذج محدد بشكل صحيح، إلا أنه يعاني من مشكلة عدم ثبات أو اختلاف التباين، وبالتالي ستكون المقدرات $\hat{\beta}_i$ جيدة نسبيا.

- يؤثر عدم ثبات التباين على توزيع $\hat{\beta}_i$ ، فيزيد تباين التوزيع ويجعل مقدرات OLS غير فعالة، لأنه ينتهك خاصية تقليل التباين.

- يؤثر اختلاف وعدم ثبات التباين على تباين المعلمات المقدرة، حيث يسبب وجود عدم ثبات التباين الحصول على مقدرات OLS بتباين أقل من التقدير (UNDERESTIMATE)، وبالتالي الحصول على St_{cal} أكبر من المتوقع، وكذلك F_{cal} ، وبالتالي فإن عدم ثبات التباين له تأثير واسع على اختبار الفرضيات.

ثانيا: الكشف عن مشكلة عدم ثبات التباين

يتم الكشف عادة عن عدم ثبات التباين بالعديد من الاختبارات، والتي نذكر من أهمها:

1- اختبار GOLDFELD-QUANDT:

اقترح GOLDFELD AND QUANDT (1965) اختبارا يقوم على أن تباين البواقي إذا كان ثابتا لجميع المشاهدات، فإن تباين جزء من أجزاء العينة سيكون مساويا لتباين جزء آخر من العينة. لكي يكون الاختبار قابلا للتطبيق، يتعين تحديد المتغير المستقل المرتبط بتباين البواقي. ولتوضيح خطوات اختبار GOLDFELD-QUANDT نفترض النموذج الخطي البسيط التالي:

[1] - خالد محمد السواعي، مرجع سبق ذكره، ص ص242-243.

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \text{L L} + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t$$

وبالتالي تكون خطوات الاختبار كمايلي:

- شكل الاختبار:

$$\begin{cases} H_0 : \delta_1^2 = \delta_2^2 \\ H_1 : \delta_1^2 \neq \delta_2^2 \end{cases}$$

- تحديد أحد المتغيرات المستقلة الذي يرتبط بتباين المتغير العشوائي، وترتيب مشاهدات هذا المتغير تصاعديا.*

- ترتيب البيانات الخاصة بجميع المتغيرات المستقلة والمتغير التابع ترتيبا تصاعديا، وفقا لقيم X_i .

- تقسيم العينة (n) إلى ثلاثة أجزاء، الجزء الأول حجمه n_1 ، ويضم القيم الدنيا للمتغير X_i ، بينما الجزء الثالث حجمه n_2 ، ويضم القيم الكبرى للمتغير X_i ، أما الجزء الوسط فحجمه $n-(n_1+n_2)$.*

- تقدير نموذجين للجزء الأول والثالث بطريقة المربعات الصغرى العادية:

$$Y_t = \beta_1^{(1)} + \beta_2^{(1)} X_{2t} + \beta_3^{(1)} X_{3t} + \text{L L} + \beta_k^{(1)} X_{kt} + \varepsilon_t \qquad / t = 1\text{L L } n_1$$
$$Y_t = \beta_1^{(2)} + \beta_2^{(2)} X_{2t} + \beta_3^{(2)} X_{3t} + \text{L L} + \beta_k^{(2)} X_{kt} + \varepsilon_t \qquad / t = 1\text{L L } n_2$$

- حساب مجموع مربعات بواقي التقدير للنموذجين السابقين، أي حساب RSS_1 و RSS_2 .

- حساب إحصائية F_{cal} باستخدام العلاقة التالية:

$$F_{cal} = \frac{RSS_2 / n_2 - k}{RSS_1 / n_1 - k}$$

هذه الاحصائية تتبع توزيع FISHER بدرجتي حرية $\nu_1 = n_2 - k$ و $\nu_2 = n_1 - k$

- **القرار:** ويكون كما يلي:

- ✓ نرفض H_0 إذا كان $F_{cal} \geq F_{tab}$ ، وبالتالي فالنموذج يعاني من مشكل عدم ثبات التباين.
- ✓ نرفض H_1 إذا كان $F_{cal} < F_{tab}$ ، وبالتالي فالنموذج لا يعاني من مشكل عدم ثبات التباين.

<u>مثال:</u> من المثال التطبيقي السابق والنموذج الخطي المتعدد المقدر كمايلي:

---

* - اختبار GOLDFELD-QUANDT لا يمكن تطبيقه إلا في حالة ما إذا كان أحد المتغيرات المستقلة هو السبب في عدم ثبات التباين.

* - يستحسن أن يكون حجم الجزء الوسط خمس (1/5) المشاهدات، وقد أثبتت الدراسات التطبيقية التي قام بها كل من GOLDFELD و QUANDT أن حجم الجزء الوسط في العينات التي يكون بها عدد المشاهدات أكبر من 30 هو ربع المشاهدات الكلية.

$$\hat{Y}_t = 772.508 + 0.5961 \cdot X_{2t} + 0.9722 \cdot X_{3t}$$
$$(2.9637) \quad (3.9049) \quad (4.1450)$$
$$n = 29 \qquad R^2 = 0.9832 \qquad F_{cal} = 764.40$$

حيث: Y_t : الناتج المحلي الاجمالي، X_{2t} : الانفاق العام، X_{3t} : الكتلة النقدية بمفهومها الواسع.

وعلى اعتبار أن النموذج مقبول اقتصاديا واحصائيا. وأن متغير الانفاق العام من المرجح أن يكون سببا في عدم ثبات التباين.

المطلوب: الكشف عن عدم ثبات التباين باستخدام اختبار GOLDFELD-QUANDT.

- ترتيب البيانات ترتيبا تصاعديا وفقا للترتيب التصاعدي لمشاهدات الانفاق العام.

السنة	الناتج المحلي الاجمالي	الانفاق العام	الكتلة النقدية
1990	472.7	136.49	343.005
1991	752.3	212.1	415.27
1992	918.8	420.13	515.9
1993	1005.4	476.62	627.427
1994	1274	566.32	723.514
1996	2256.6	724.6	915.058
1995	1743.8	759.61	799.562
1997	2243.9	845.19	1081.518
1998	2444.2	875.73	1592.461
1999	2825.6	961.68	1789.35
2000	3698.7	1178.12	2022.5
2001	3754.8	1321.02	2473.5
2002	4023.8	1550.64	2901.5
2003	4700.39	1690.19	3354.9
2004	6150.4	1891.79	3738.037
2005	7563.6	2052	4070.4
2006	8520.6	2428.49	4827.6
2007	9408.29	3108.5	5994.6
2008	11043.7	4175.7	6956
2009	10034.3	4246.3	7173.1
2010	12049.5	4466.89	8162.8
2011	14384.8	5731.4	9929.2
2013	17242.5	6024.2	11941.5
2014	17228.6	6995.7	13686.8
2012	16643.8	7058.1	11015.1

2018	21041.103	7258.9	15687.33
2016	17406.8	7297.4	13816.3
2017	18876.6	7389.3	14974.6
2015	16702.1	7656.3	13704.5

بيانات الجزء الأول، $n_1 = 12$

بيانات الجزء الثالث، $n_2 = 11$

- تقدير نموذجين للجزء الأول والثالث بطريقة المربعات الصغرى العادية:

$$Y_t = \beta_1^{(1)} + \beta_2^{(1)} X_{2t} + \beta_3^{(1)} X_{3t} + \varepsilon_t \qquad / t = 1L\ L\ 12$$
$$Y_t = \beta_1^{(2)} + \beta_2^{(2)} X_{2t} + \beta_3^{(2)} X_{3t} + \varepsilon_t \qquad / t = 1L\ L\ 11$$

كانت نتائج التقدير كمايلي:

<u>نموذج الجزء الأول:</u>

$$\hat{Y}_t = 1250.35 + 0.1317 \cdot X_{2t} + 0.5872 \cdot X_{3t}$$

$$n_1 = 12 \qquad R^2 = 0.9680 \qquad F_{cal} = 136.40 \qquad RSS_1 = 433649.7$$

<u>نموذج الجزء الثاني:</u>

$$\hat{Y}_t = 3432.90 + 0.0761 \cdot X_{2t} + 0.820 \cdot X_{3t}$$

$$n_2 = 11 \qquad R^2 = 0.9266 \qquad F_{cal} = 50.501 \qquad RSS_2 = 8585350.1$$

- حساب قيمة F_{cal} باستخدام العلاقة التالية:

$$F_{cal} = \frac{RSS_2 / (n_2 - k)}{RSS_1 / (n_1 - k)} = \frac{8585350.1 / (11-3)}{433649.7 / (12-3)} = 22.27$$

ولدينا: $F_{tab} = F^{\alpha=5\%}_{((n_2-k).(n_1-k))} = F^{\alpha=5\%}_{(8.9)} = 3.230$

- **القرار:** نلاحظ أن: $F_{cal} > F_{tab}$ ، وبالتالي نرفض H_0 ، أي أن النموذج يعاني من مشكل عدم ثبات التباين.

2- اختبار BREUSCH-PAGAN:

طور BREUSCH AND PAGAN (1979) اختبار مضاعف لاغرانج LM TEST للكشف عن عدم ثبات التباين في النموذج التالي:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + L\ L + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t$$

حيث يتضمن اختبار BREUSCH-PAGAN الخطوات التالية:[1]

- تقدير النموذج $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + L\ L + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t$ بطريقة OLS، وحساب بواقي التقدير $e_t = Y_t - \hat{Y}_t$.
- تقدير الانحدار المساعد التالي: $e_t^2 = \gamma_1 + \gamma_2 Z_{2t} + L\ L + \gamma_P Z_{Pt} + \nu_t$

حيث: Z_{it} هي مجموعة المتغيرات التي يعتقد أنها تحدد تباين المتغير العشوائي (عادة ما تستخدم المتغيرات التفسيرية X_{it} نيابة عن المتغيرات Z_{it})، فيصبح الانحدار المساعد كمايلي: $e_t^2 = \gamma_1 + \gamma_2 X_{2t} + L\ L + \gamma_P X_{Pt} + \nu_t$.

- تحديد وصياغة فرضيات الاختبار:

$$\begin{cases} H_0 : \gamma_1 = \gamma_2 = L = \gamma_P = 0 \\ H_1 : \exists i \ / \ \gamma_i \neq 0 \qquad i = 1L\ P \end{cases}$$

[1] - خالد محمد السواعي، مرجع سبق ذكره، ص ص247-248.

- حساب الاحصائية LM: $LM = n \cdot R^2$

حيث: n : عدد المشاهدات المستخدمة في تقدير الانحدار المساعد: $e_t^2 = \gamma_1 + \gamma_2 X_{2t} + L + \gamma_P X_{Pt} + \nu_t$ ، R^2 : معامل تحديد هذا الانحدار. الاحصائية LM تتبع توزيع KHI-DEUX بدرة حرية $P-1$ ، أي: $LM \rightarrow \chi^2_{P-1}$.

- **القرار:** يكون قرار الاختبار كمايلي:

✓ نرفض الفرضية H_0 إذا كانت $LM \geq \chi^2_{P-1}$ عند مستوى معنوية معين، وبالتالي فالنموذج يعاني من مشكل عدم ثبات التباين.

✓ نرفض الفرضية H_1 إذا كانت $LM < \chi^2_{P-1}$ عند مستوى معنوية معين، وبالتالي فالنموذج لا يعاني من مشكل عدم ثبات التباين.

<u>مثال:</u> من المثال التطبيقي السابق والنموذج الخطي المتعدد المقدر كمايلي:

$$\hat{Y}_t = 772.508 + 0.5961 \cdot X_{2t} + 0.9722 \cdot X_{3t}$$
$$(2.9637) \quad (3.9049) \quad (4.1450)$$
$$n = 29 \qquad R^2 = 0.9832 \qquad F_{cal} = 764.40$$

حيث: Y_t : الناتج المحلي الاجمالي، X_{2t} : الانفاق العام، X_{3t} : الكتلة النقدية بمفهومها الواسع.

<u>المطلوب</u>: الكشف عن عدم ثبات التباين باستخدام اختبار BREUSCH-PAGAN.

- تقدير النموذج $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \varepsilon_t$ وحساب بواقي التقدير.

- تقدير الانحدار المساعد: $e_t^2 = \gamma_1 + \gamma_2 X_{2t} + \gamma_3 X_{3t} + \nu_t$ ، باستخدام OLS كانت نتائج التقدير كمايلي:

$$\hat{e}_t^2 = 232926.2 + 193.27 \cdot X_{2t} - 18.906 \cdot X_{3t}$$
$$n = 29 \qquad R^2 = 0.2152 \qquad F_{cal} = 3.5667$$

- حساب الاحصائية LM:

$$LM = n \cdot R^2 = 29 \cdot (0.2152) = 6.2435$$

- **القرار:** نلاحظ أن: $(LM = 6.2435) \geq (\chi^2_2 = 5.9915)$ عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$ ، وبالتالي نرفض الفرضية H_0 ، أي أن النموذج يعاني من مشكل عدم ثبات التباين.

3- اختبار WHITE:

سنة 1980 طور WHITE اختبارا أكثر عمومية للكشف عن عدم ثبات التباين، وهو كذلك اختبار LM، يعتمد على العلاقة بين مربعات البواقي وجميع المتغيرات المستقلة وكذلك مربعاتها وحاصل تقاطعها*، فإذا كان لدينا النموذج التالي:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \varepsilon_t$$

حيث يتضمن اختبار WHITE الخطوات التالية:

- تقدير النموذج $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \varepsilon_t$ بطريقة OLS، وحساب بواقي التقدير $e_t = Y_t - \hat{Y}_t$.
- تقدير الانحدار المساعد التالي بطريقة OLS:

$$e_t^2 = \gamma_1 + \gamma_2 X_{2t} + \gamma_3 X_{3t} + \gamma_4 X_{2t}^2 + \gamma_5 X_{3t}^2 + \gamma_6 X_{2t} X_{3t} + \nu_t$$

- تحديد وصياغة فرضيات الاختبار:

$$\begin{cases} H_0 : \gamma_1 = \gamma_2 = \mathrm{L} \ = \gamma_6 = 0 \\ H_1 : \exists\, i \quad / \quad \gamma_i \neq 0 \qquad i = 1\mathrm{L}\ 6 \end{cases}$$

- حساب الاحصائية LM: $LM = n \cdot R^2$

حيث: n : عدد المشاهدات المستخدمة في تقدير الانحدار المساعد، و R^2 : معامل تحديد هذا الانحدار. الاحصائية LM تتبع توزيع KHI-DEUX بدرة حرية تساوي عدد المعلمات المقدرة في الانحدار المساعد ناقص الحد الثابت، أي: $LM \to \chi^2_{P-1}$.

- القرار: يكون قرار الاختبار كمايلي:

✓ نرفض الفرضية H_0 إذا كانت $LM \geq \chi^2_{P-1}$ عند مستوى معنوية معين، وبالتالي فالنموذج يعاني من مشكل عدم ثبات التباين.

✓ نرفض الفرضية H_1 إذا كانت $LM < \chi^2_{P-1}$ عند مستوى معنوية معين، وبالتالي فالنموذج لا يعاني من مشكل عدم ثبات التباين.

<u>مثال:</u> من المثال التطبيقي السابق والنموذج الخطي المتعدد المقدر كمايلي:

$$\hat{Y}_t = 772.508 + 0.5961 \cdot X_{2t} + 0.9722 \cdot X_{3t}$$
$$(2.9637) \quad (3.9049) \quad (4.1450)$$
$$n = 29 \qquad R^2 = 0.9832 \qquad F_{cal} = 764.40$$

* - اختبار White يشمل على كل المتغيرات المستقلة ومربعاتها وحاصل ضربها مثنى مثنى، ويسمى White test with Cross Terms،

حيث: Y_t : الناتج المحلي الاجمالي، X_{2t} : الانفاق العام، X_{3t} : الكتلة النقدية بمفهومها الواسع.

وعلى اعتبار أن النموذج مقبول اقتصاديا واحصائيا.

المطلوب: الكشف عن عدم ثبات التباين باستخدام اختبار WHITE.

- تقدير الانحدار المساعد التالي بطريقة OLS:

$$e_t^2 = \gamma_1 + \gamma_2 X_{2t} + \gamma_3 X_{3t} + \gamma_4 X_{2t}^2 + \gamma_5 X_{3t}^2 + \gamma_6 X_{2t} X_{3t} + \nu_t$$

كانت نتائج التقدير كما يلي:

$$\hat{e}_t^2 = 598029.4 - 3158.07 \cdot X_{2t} + 1678.09 \cdot X_{3t} - 0.31 \cdot X_{2t}^2 - 0.24 \cdot X_{3t}^2 + 0.64 \cdot X_{2t} X_{3t}$$
$$n = 29 \qquad R^2 = 0.4383 \qquad F_{cal} = 3.59$$

- حساب الاحصائية LM:

$$LM = n \cdot R^2 = 29 \cdot (0.4383) = 12.7123$$

- القرار: نلاحظ أن: $(LM = 12.7123) \geq (\chi_5^2 = 11.0705)$ عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$ ، وبالتالي نرفض الفرضية H_0 ، أي أن النموذج يعاني من مشكل عدم ثبات التباين.

4- اختبار ENGLE 'S ARCH TEST:

يستخدم هذا الاختبار على بيانات السلاسل الزمنية فقط، ويستعمل للكشف عن وجود الارتباط الذاتي في حدود الخطأ لنموذج الانحدار، وقدم ENGLE (1982) مفهوما جديدا لقبول الارتباط الذاتي لحدوثه في تباين حدود الخطأ بدلا من حدود الخطأ نفسها، حيث طور ENGLE نموذج الانحدار الذاتي المشروط بعدم ثبات تباين الأخطاء AUTOREGRESSIVE CONDITIOAL HETEROSKEDASTICITY (ARCH)، والفكرة الأساسية له هي أن تباين المتغير العشوائي ε_t يعتمد على ابطاءات مربعات المتغير العشوائي، ففي حالة سيرورة $ARCH(1)$ ، فإن تباين المتغير العشوائي يعطى بالصيغة التالية:

$$Var(\varepsilon_t) = \delta_{\varepsilon_t}^2 = \vartheta_0 + \vartheta_1 \cdot \varepsilon_{t-1}^2 + \eta_t$$

ويمكن توسع السيرورة ARCH لرتبة أعلى، أي $ARCH(P)$ ، فيعطى تباين المتغير العشوائي كمايلي:

$$Var(\varepsilon_t) = \delta_{\varepsilon_t}^2 = \vartheta_0 + \vartheta_1 \cdot \varepsilon_{t-1}^2 + \vartheta_2 \cdot \varepsilon_{t-2}^2 + L + \vartheta_p \cdot \varepsilon_{t-p}^2 + \eta_t$$

في حالة عدم وجود ارتباط ذاتي في تباين المتغير العشوائي، فإن: $\vartheta_1 = \vartheta_2 = L = \vartheta_p = 0$ ، وبالتالي فإن: $Var(\varepsilon_t) = \delta_{\varepsilon_t}^2 = \vartheta_0$ ، وهو ما يعني ثبات تباين المتغير العشوائي.

أما خطوات هذا الاختبار فتتمثل فيما يلي:

- تقدير النموذج $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + L + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t$ بطريقة OLS، وحساب بواقي التقدير $e_t = Y_t - \hat{Y}_t$. ومربع بواقي التقدير e_t^2.

- تقدير الانحدار المساعد التالي بطريقة OLS:

$$e_t^2 = \vartheta_0 + \vartheta_1 e_{t-1}^2 + \vartheta_2 e_{t-2}^2 + L + \vartheta_P e_{t-p}^2 + \eta_t$$

- تحديد وصياغة فرضيات الاختبار:

$$\begin{cases} H_0 : \vartheta_1 = \vartheta_2 = L = \vartheta_P = 0 \\ H_1 : \exists i \quad / \quad \vartheta_i \neq 0 \qquad i = 1L\ p \end{cases}$$

- حساب الاحصائية LM: $LM = (n - P) \cdot R^2$

حيث: n: عدد المشاهدات المستخدمة في تقدير الانحدار المساعد، و R^2: معامل تحديد هذا الانحدار. الاحصائية LM تتبع توزيع KHI-DEUX بدرجة حرية تساوي P، أي: $LM \to \chi_P^2$.

- **القرار:** يكون قرار الاختبار كمايلي:

✓ نرفض الفرضية H_0 إذا كانت $LM \geq \chi_P^2$ عند مستوى معنوية معين، وبالتالي فالنموذج يعاني من مشكل عدم ثبات التباين المشروط للأخطاء.

✓ نرفض الفرضية H_1 إذا كانت $LM < \chi_P^2$ عند مستوى معنوية معين، وبالتالي فالنموذج لا يعاني من مشكل عدم ثبات التباين المشروط للأخطاء.

ثالثا: معالجة مشكلة عدم ثبات التباين

لا توجد طريقة محددة لمعالجة مشكلة عدم ثبات التباين، فمع اختلاف أنماط عدم ثبات التباين تختلف طرق المعالجة، نذكر من أهم هذه الطرق مايلي:

1- طريقة المربعات الصغرى المعممة (GLS) GENERALIZED LEAST SQUARES:

إذا كان تباين المتغير العشوائي غير ثابت ومعلوم، فإن التخلص من مشكلة عدم ثبات التباين تتم من خلال استخدام طريقة المربعات الصغرى المعممة.

نعتبر النموذج التالي:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + L + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t$$

نفترض أن تباين المتغير العشوائي غير ثابت، أي: $V(\varepsilon_t) = \delta_t^2$ ، ولحل هذه المشكلة نقسم كل حد من حدود النموذج على الانحراف المعياري لحد الخطأ (δ_t)، فنحصل على النموذج المعدل التالي:

$$\frac{Y_t}{\delta_t} = \beta_1 \frac{1}{\delta_t} + \beta_2 \frac{X_{2t}}{\delta_t} + L + \beta_k \frac{X_{kt}}{\delta_t} + \frac{\varepsilon_t}{\delta_t}$$
$$Y_t^* = \beta_1^* + \beta_2 X_{2t}^* + L + \beta_k X_{kt}^* + \nu_t$$

فيكون تباين المتغير العشوائي المعدل في النموذج المعدل كما يلي:

$$V(\nu_t) = V\left(\frac{\varepsilon_t}{\delta_t}\right) = \frac{1}{\delta_t^2} V(\varepsilon_t) = \frac{\delta_t^2}{\delta_t^2} = 1$$

هذا يعني أن تباين المتغير العشوائي باستخدام المتغيرات المعدلة أصبح ذو تباين ثابت، لذلك فإن استخدام طريقة (OLS) على النموذج المعدل سوف يعطي مقدرات تتمتع بخصائص BLUE، هذه النتيجة وفي ظل تعديل البيانات الأصلية وباستخدام طريقة (OLS) تسمى بطريقة المربعات الصغرى المعممة (GLS)[1]، وأن طريقة (GLS) هي طريقة (OLS) للمتغيرات المعدلة التي تستوفي فرضيات طريقة المربعات الصغرى العادية، وأن المقدرات المحصل عليها هي مقدرات (GLS) وتتمتع بخصائص BLUE.

2- أسلوب تحويل المتغيرات:

عندما يكون تباين المتغير العشوائي غير ثابت وغير معلوم فيفترض أن يكون بأنماط مختلفة، وبالتالي فإن المعالجة تأخذ أشكالا متعددة حسب الأنماط المفترضة لعدم ثبات التباين.

هناك عدة ة افتراضات لعدم ثبات التباين، من أهمها:[2]

2-1- الافتراض الأول:

عندما يتناسب تباين المتغير العشوائي مع مربع متغير مستقل، بمعنى أن التباين يزداد بشكل تناسبي مع X_{it}

وهو ما يمكن التعبير عنه بالصيغة التالية:

$$E(\varepsilon_t^2) = \delta_{\varepsilon_t}^2 = \delta_\varepsilon^2 X_{it}^2$$

[1] - أحمد سلطان محمد، هيثم يعقوب يوسف وآخرون، مرجع سبق ذكره، ص266.

[2] - للمزيد أنظر:

- أحمد سلطان محمد، هيثم يعقوب يوسف وآخرون، مقدمة تحليلية في مشاكل الانحدار باستخدام برمجية Eviews، الجزء الثاني، جامعة ديالي، العراق، 2015، ص ص 272-278.

- شيخي محمد، طرق الاقتصاد القياسي، محاضرات وتطبيقات، الطبعة الأولى، دار الحامد للنشر والتوزيع، عمان، 2011، ص ص 117-118.

فمن أجل تحقيق ثبات تباين المتغير العشوائي يتم قسمة طرفي النموذج الأصلي المقدر الذي يعاني من مشكلة عدم ثبات التباين على X_{it} للحصول على:

$$\frac{Y_t}{X_{it}} = \beta_1 \frac{1}{X_{it}} + \beta_2 \frac{X_{2t}}{X_{it}} + L + \beta_i \frac{X_{it}}{X_{it}} + L + \beta_k \frac{X_{kt}}{X_{it}} + \frac{\varepsilon_t}{X_{it}}$$

$$\frac{Y_t}{X_{it}} = \beta_1 \frac{1}{X_{it}} + \beta_2 \frac{X_{2t}}{X_{it}} + L + \beta_i + L + \beta_k \frac{X_{kt}}{X_{it}} + \frac{\varepsilon_t}{X_{it}}$$

$$Y_t^* = \beta_1 X_{1t}^* + \beta_2 X_{2t}^* + L + \beta_i + L + \beta_k X_{kt}^* + \nu_t$$

ويفترض في هذا النموذج المعدل أن يكون تباين المتغير العشوائي ثابتا، حيث:

$$V(\nu_t) = V\left(\frac{\varepsilon_t}{X_{it}}\right) = \frac{1}{X_{it}^2} V(\varepsilon_t) = \frac{\delta_\varepsilon^2 \cdot X_{it}^2}{X_{it}^2} = \delta_\varepsilon^2$$

لذلك فإن تقدير النموذج المعدل بأخذ انحدار المتغير التابع $\frac{Y_t}{X_{it}}$ على المتغيرات المستقلة $\frac{1}{X_{it}}$، $\frac{X_{2t}}{X_{it}}$، ...، $\frac{X_{kt}}{X_{it}}$. بطريقة (OLS) سوف يعطي مقدرات تتمتع بخصائص BLUE، مع ملاحظة أن الحد الثابت β_1 في النموذج الأصلي المقدر أصبح معامل انحدار في النموذج المعدل، وأن معامل الانحدار β_i في النموذج الأصلي المقدر أصبح حدا ثابتا في النموذج المعدل.

2-2- الافتراض الثاني:

عندما يتناسب تباين المتغير العشوائي مع متغير مستقل، بمعنى أن التباين يزداد بشكل تناسبي مع X_{it}، وهو ما يمكن التعبير عنه بالصيغة التالية:

$$E(\varepsilon_t^2) = \delta_{\varepsilon_t}^2 = \delta_\varepsilon^2 X_{it}$$

لمعالجة عدم ثبات تباين المتغير العشوائي يتم قسمة النموذج المقدر على $\sqrt{X_{it}}$ للحصول على:

$$\frac{Y_t}{\sqrt{X_{it}}} = \beta_1 \frac{1}{\sqrt{X_{it}}} + \beta_2 \frac{X_{2t}}{\sqrt{X_{it}}} + L + \beta_i \frac{X_{it}}{\sqrt{X_{it}}} + L + \beta_k \frac{X_{kt}}{\sqrt{X_{it}}} + \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{X_{it}}}$$

$$\frac{Y_t}{\sqrt{X_{it}}} = \beta_1 \frac{1}{\sqrt{X_{it}}} + \beta_2 \frac{X_{2t}}{\sqrt{X_{it}}} + L + \beta_i \sqrt{X_{it}} + L + \beta_k \frac{X_{kt}}{\sqrt{X_{it}}} + \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{X_{it}}}$$

$$Y_t^* = \beta_1 X_{1t}^* + \beta_2 X_{2t}^* + L + \beta_i X_{it}^* + L + \beta_k X_{kt}^* + \nu_t$$

إن تباين المتغير العشوائي ν_t في هذا النموذج المعدل ثبات، وبالتالي فالنموذج المعدل لا يعاني من مشكلة عدم ثبات التباين، حيث نجد أن:

$$V(\nu_t) = V\left(\frac{\varepsilon_t}{\sqrt{X_{it}}}\right) = \frac{1}{X_{it}} V(\varepsilon_t) = \frac{\delta_\varepsilon^2 \cdot X_{it}}{X_{it}} = \delta_\varepsilon^2$$

لذا يمكن تقدير النموذج المعدل بإجراء انحدار $\frac{Y_t}{\sqrt{X_{it}}}$ على $\frac{1}{\sqrt{X_{it}}}$ ، .... ، $\frac{X_{2t}}{\sqrt{X_{it}}}$ ، .... ، $\sqrt{X_{it}}$ ، .... ، $\frac{X_{kt}}{\sqrt{X_{it}}}$ بطريقة (OLS)، وهو ما يعطي مقدرات تتمتع بخصائص BLUE، مع ملاحظة أن النموذج المعدل لا يحتوي على حد ثابت.

2-3- الافتراض الثالث:

عندما يتناسب تباين المتغير العشوائي مع متوسط المتغير التابع، بمعنى أن التباين يزداد بشكل تناسبي مع مربع القيمة المتوقعة لـ Y_t ، وهو ما يمكن التعبير عنه بالصيغة التالية:

$$E(\varepsilon_t^2) = \delta_{\varepsilon_t}^2 = \delta_\varepsilon^2\left(E(\hat{Y}_t)\right)^2 = \delta_\varepsilon^2(\beta_1 + \beta_2 X_{2t} + L + \beta_k X_{kt})^2$$

بناءا على هذا الافتراض وللتخلص من مشكل عدم ثبات تباين المتغير العشوائي، يتم قسمة طرفي النموذج الأصلي على $E(\hat{Y}_t)$ ، حيث: $E(\hat{Y}_t) = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + L + \beta_k X_{kt}$ ، فنجد النموذج المعدل التالي:

$$\frac{Y_t}{\beta_1 + \beta_2 X_{2t} + L + \beta_k X_{kt}} = \beta_1 \frac{1}{\beta_1 + \beta_2 X_{2t} + L + \beta_k X_{kt}} + \beta_2 \frac{X_{2t}}{\beta_1 + \beta_2 X_{2t} + L + \beta_k X_{kt}} + L$$
$$+ \beta_k \frac{X_{kt}}{\beta_1 + \beta_2 X_{2t} + L + \beta_k X_{kt}} + \frac{\varepsilon_t}{\beta_1 + \beta_2 X_{2t} + L + \beta_k X_{kt}}$$

ولاختبار ما إذا كان المتغير العشوائي الجديد في النموذج المعدل $\left(\frac{\varepsilon_t}{\beta_1 + \beta_2 X_{2t} + L + \beta_k X_{kt}}\right)$ له تباين ثابت نجد:

$$V\left(\frac{\varepsilon_t}{\beta_1 + \beta_2 X_{2t} + L + \beta_k X_{kt}}\right) = \frac{1}{(\beta_1 + \beta_2 X_{2t} + L + \beta_k X_{kt})^2} V(\varepsilon_t) = \frac{(\beta_1 + \beta_2 X_{2t} + L + \beta_k X_{kt})^2 \delta_\varepsilon^2}{(\beta_1 + \beta_2 X_{2t} + L + \beta_k X_{kt})^2} = \delta_\varepsilon^2$$

وبذلك يجري التصحيح على مرحلتين، الأولى تتضمن اجراء انحدار بواسطة طريقة OLS، والحصول على $\hat{Y}_t$ ، والمرحلة الثانية اجراء انحدار $\frac{Y_t}{\hat{Y}_t}$ على $\frac{1}{\hat{Y}_t}$ ، ..... ، $\frac{X_{2t}}{\hat{Y}_t}$ ، ..... ، $\frac{X_{kt}}{\hat{Y}_t}$ بطريقة (OLS)، وعلى الرغم من أن $\hat{Y}_t$ ليس بالضبط $E(\hat{Y}_t)$ ، إلا أنهما يتقاربان عند زيادة حجم العينة بشكل كبير، ومن ثم فإن النموذج المعدل سيتضمن خصائص BLUE.

2-4- الافتراض الرابع:

عندما يتناسب تباين المتغير العشوائي مع بواقي تقدير النموذج، ويتضمن هذا الافتراض أن تباين المتغير العشوائي دالة خطية للقيم المطلقة لبواقي تقدير النموذج بطريقة OLS، وهو ما يمكن التعبير عنه بالصيغة التالية:

$$E(\varepsilon_t^2) = \delta_{\varepsilon_t}^2 = \delta_\varepsilon^2 |e_t|$$

للتخلص من مشكل عدم ثبات التباين يتم قسمة المتغيرات الأصلية على الجذر التربيعي للقيم المطلقة للبواقي، فنحصل على النموذج المعدل التالي:

$$\frac{Y_t}{\sqrt{|e_t|}} = \beta_1 \frac{1}{\sqrt{|e_t|}} + \beta_2 \frac{X_{2t}}{\sqrt{|e_t|}} + L + \beta_i \frac{X_{it}}{\sqrt{|e_t|}} + L + \beta_k \frac{X_{kt}}{\sqrt{|e_t|}} + \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{|e_t|}}$$

$$Y_t^* = \beta_1 X_{1t}^* + \beta_2 X_{2t}^* + L + \beta_i X_{it}^* + L + \beta_k X_{kt}^* + \nu_t$$

إن تباين المتغير العشوائي ν_t في هذا النموذج المعدل ثبات، وبالتالي فالنموذج المعدل لا يعاني من مشكلة عدم ثبات التباين، حيث نجد أن:

$$V(\nu_t) = V\left(\frac{\varepsilon_t}{\sqrt{|e_t|}}\right) = \frac{1}{|e_t|} V(\varepsilon_t) = \frac{\delta_\varepsilon^2 \cdot |e_t|}{|e_t|} = \delta_\varepsilon^2$$

لذا يمكن تقدير النموذج المعدل بإجراء انحدار $\frac{Y_t}{\sqrt{|e_t|}}$ على $\frac{1}{\sqrt{|e_t|}}$ ، $\frac{X_{2t}}{\sqrt{|e_t|}}$ ،....، $\frac{X_{kt}}{\sqrt{|e_t|}}$ بطريقة (OLS)، وهو ما يعطي مقدرات تتمتع بخصائص BLUE، مع ملاحظة أن النموذج المعدل لا يحتوي على حد ثابت.

2-5- الافتراض الخامس:

يسمى هذا الافتراض بالتحويل اللوغاريتمي عندما يعاني النموذج الخطي من عدم ثبات التباين، وهو افتراض عام يقوم على أساس أن أخذ اللوغاريتم لأي قيم يؤدي إلى تقارب تلك القيم، وهو ما يؤدي إلى تقليل التباين بين هذه القيم. عند أخذ اللوغاريتمات لقيم مشاهدات المتغير التابع والمتغيرات المستقلة، فإن النموذج الأصلي المقدر الذي يعاني من عدم ثبات التباين سيأخذ الشكل التالي:

$$\ln(Y_t) = \beta_1 + \beta_2 \ln(X_{2t}) + L + \beta_k \ln(X_{kt}) + \varepsilon_t$$

في حالة اعتماد طريقة OLS لتقدير هذا النموذج المعدل، فإنه لا يعاني من مشكلة عدم ثبات التباين، استنادا لكون التباين بين القيم قد زال واختفى بأخذ اللوغاريتمات.

Table 01: **Critical values of the St-distribution**

ν \ α	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
1	3.078	6.314	12.076	31.821	63.657	318.310	636.620
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.326	31.598
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.213	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.767
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160	3.373
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291

Table 02: **Critical values of the F-distribution**

	$\nu_1 = 1$		$\nu_1 = 2$		$\nu_1 = 3$		$\nu_1 = 4$		$\nu_1 = 5$	
ν_2	$\alpha = 5\%$	$\alpha = 1\%$	$\alpha = 5\%$	$\alpha = 1\%$	$\alpha = 5\%$	$\alpha = 1\%$	$\alpha = 5\%$	$\alpha = 1\%$	$\alpha = 5\%$	$\alpha = 1\%$
1	161.4	4052.00	199.5	4999.00	213.7	3403.00	224.6	5625.00	230.2	5764.00
2	18.51	98.49	19.00	99.00	19.16	99.17	19.25	99.25	19.30	99.30
3	10.13	34.12	9.55	30.81	9.28	29.46	9.12	28.71	9.01	28.24
4	7.71	21.20	6.94	18.00	6.59	16.69	6.39	13.98	6.26	13.32
5	6.61	16.26	5.79	13.27	5.41	12.06	5.19	11.39	5.03	10.97
6	3.99	13.74	3.14	10.91	4.76	9.78	4.53	9.13	4.39	8.75
7	3.39	12.23	4.74	9.35	4.33	8.43	4.12	7.85	3.97	7.45
8	3.32	11.26	4.46	8.63	4.07	7.39	3.84	7.01	3.69	6.63
9	5.12	10.56	4.26	8.02	3.86	6.99	3.63	6.42	3.48	6.06
10	4.96	10.04	4.10	7.56	3.71	6.33	3.48	5.99	3.33	5.64
11	4.84	9.65	3.98	7.20	3.59	6.22	3.36	5.67	3.20	5.32
12	4.75	9.33	3.88	6.93	3.49	5.93	3.26	5.41	3.11	5.06
13	4.67	9.07	3.80	6.70	3.41	5.74	3.18	5.20	3.02	4.86
14	4.60	8.86	3.74	6.31	3.34	5.56	3.11	5.03	2.96	4.69
15	4.34	8.68	3.68	6.36	3.29	5.42	3.06	4.89	2.90	4.56
16	4.49	8.53	3.63	6.23	3.24	5.29	3.01	4.77	2.85	4.44
17	4.45	8.40	3.59	6.11	3.20	5.18	2.96	4.67	2.81	4.34
18	4.41	8.28	3.53	6.01	3.16	5.09	2.93	4.58	2.77	4.25
19	4.38	8.18	3.52	5.93	3.13	5.01	2.90	4.50	2.74	4.17
20	4.35	8.10	3.49	5.85	3.10	4.94	2.87	4.43	2.71	4.10
21	4.32	8.02	3.47	5.78	3.07	4.87	2.84	4.37	2.68	4.04
22	4.30	7.94	3.44	5.72	3.05	4.82	2.82	4.31	2.66	3.99
23	4.28	7.88	3.42	5.66	3.03	4.76	2.80	4.26	2.64	3.94
24	4.26	7.82	3.40	5.61	3.01	4.72	2.78	4.22	2.62	3.90
25	4.24	7.77	3.38	5.37	2.99	4.68	2.76	4.18	2.60	3.86
26	4.22	7.72	3.37	5.33	2.98	4.64	2.74	4.14	2.39	3.82
27	4.21	7.68	3.33	5.49	2.96	4.60	2.73	4.11	2.37	3.78
28	4.20	7.64	3.34	5.43	2.95	4.57	2.71	4.07	2.56	3.75
29	4.18	7.60	3.33	5.42	2.93	4.34	2.70	4.04	2.34	3.73
30	4.17	7.56	3.32	5.39	2.92	4.31	2.69	4.02	2.53	3.70
40	4.08	7.31	3.23	5.18	2.84	4.31	2.61	3.83	2.43	3.31
60	4.00	7.08	3.15	4.98	2.76	4.13	2.32	3.65	2.37	3.34
120	3.92	6.85	3.07	4.79	2.68	3.93	2.43	3.48	2.29	3.17
∞	3.84	6.64	2.99	4.60	2.60	3.78	2.37	3.32	2.21	3.02

Table 03: **Critical values of the chi-square distribution**

ν \ α	0.995	0.975	0.20	0.10	0.05	0.025	0.02	0.01
1	0.0000393	0.000982	1.642	2.706	3.841	5.024	5.412	6.635
2	0.0100	0.0506	3.219	4.605	5.991	7.378	7.824	9.210
3	0.0717	0.216	4.642	6.251	7.815	9.348	9.837	11.345
4	0.207	0.484	5.989	7.779	9.488	11.143	11.668	13.277
5	0.412	0.831	7.289	9.236	11.070	12.833	13.388	15.086
6	0.676	1.237	8.558	10.645	12.592	14.449	15.033	16.812
7	0.989	1.690	9.803	12.017	14.067	16.013	16.622	18.475
8	1.344	2.180	11.030	13.362	15.507	17.535	18.168	20.090
9	1.735	2.700	12.242	14.684	16.919	19.023	19.679	21.666
10	2.156	3.247	13.442	15.987	18.307	20.483	21.161	23.209
11	2.603	3.816	14.631	17.275	19.675	21.920	22.618	24.725
12	3.074	4.404	15.812	18.549	21.026	23.337	24.054	26.217
13	3.565	5.009	16.985	19.812	22.362	24.736	25.472	27.688
14	4.075	5.629	18.151	21.064	23.685	26.119	26.873	29.141
15	4.601	6.262	19.311	22.307	24.996	27.488	28.259	30.578
16	5.142	6.908	20.465	23.542	26.296	28.845	29.633	32.000
17	5.697	7.564	21.615	24.769	27.587	30.191	30.995	33.409
18	6.265	8.231	22.760	25.989	28.869	31.526	32.346	34.805
19	6.844	8.907	23.900	27.204	30.144	32.852	33.687	36.191
20	7.434	9.591	25.038	28.412	31.410	34.170	35.020	37.566
21	8.034	10.283	26.171	29.615	32.671	35.479	36.343	38.932
22	8.643	10.982	27.301	30.813	33.924	36.781	37.659	40.289
23	9.260	11.689	28.429	32.007	35.172	38.076	38.968	41.638
24	9.886	12.401	29.553	33.196	36.415	39.364	40.270	42.980
25	10.520	13.120	30.675	34.382	37.652	40.646	41.566	44.314
26	11.160	13.844	31.795	35.563	38.885	41.923	42.856	45.642
27	11.808	14.573	32.912	36.741	40.113	43.195	44.140	46.963
28	12.461	15.308	34.027	37.916	41.337	44.461	45.419	48.278
29	13.121	16.047	35.139	39.087	42.557	45.722	46.693	49.588
30	13.787	16.791	36.250	40.256	43.773	46.979	47.962	50.892
50	27.991	32.357	58.164	63.167	67.505	71.420	72.613	76.154
100	67.328	74.222	111.667	118.498	124.342	129.561	131.142	135.807

Table 04: Critical Values for the Durbin-Watson Statistic ,Level of Significance α = 0.01

n	k = l		k = 2		k = 3		k = 4		k = 5	
	d_l	d_u	d_l	d_u	d_l	d_u	d_l	d_u	d_l	d_u
15	0.81	1.07	0.70	1.25	0.59	1.46	0.49	1.70	0.39	1.96
16	0.84	1.09	0.74	1.25	0.63	1.44	0.53	1.66	0.44	1.90
17	0.87	1.10	0.77	1.25	0.67	1.43	0.57	1.30	0.48	1.85
18	0.90	1.12	0.80	1.26	0.71	1.42	0.61	1.60	0.52	1.80
19	0.93	1.13	0.83	1.26	0.74	1.41	0.65	1.58	0.56	1.77
20	0.95	1.15	0.86	1.27	0.77	1.41	0.68	1.57	0.60	1.74
21	0.97	1.16	0.89	1.27	0.80	1.41	0.72	1.55	0.63	1.71
22	1.00	1.17	0.91	1.28	0.83	1.40	0.75	1.54	0.66	1.69
23	1.02	1.19	0.94	1.29	0.86	1.40	0.77	1.53	0.70	1.67
24	1.04	1.20	0.96	1.30	0.88	1.41	0.80	1.53	0.72	1.66
25	1.05	1.21	0.98	1.30	0.90	1.41	0.83	1.52	0.75	1.65
26	1.07	1.22	1.00	1.31	0.93	1.41	0.85	1.52	0.78	1.64
27	1.09	1.23	1.02	1.32	0.95	1.41	0.88	1.51	0.81	1.63
28	1.10	1.24	1.04	1.32	0.97	1.41	0.90	1.51	0.83	1.62
29	1.12	1.25	1.05	1.33	0.99	1.42	0.92	1.51	0.85	1.61
30	1.13	1.26	1.07	1.34	1.01	1.42	0.94	1.51	0.88	1.61
31	1.15	1.27	1.08	1.34	1.02	1.42	0.96	1.51	0.90	1.60
32	1.16	1.28	1.10	1.35	1.04	1.43	0.98	1.51	0.92	1.60
33	1.17	1.29	1.11	1.36	1.05	1.43	1.00	1.51	0.94	1.59
34	1.18	1.30	1.13	1.36	1.07	1.43	1.01	1.51	0.95	1.59
35	1.19	1.31	1.14	1.27	1.08	1.44	1.03	1.51	0.97	1.59
36	1.21	1.32	1.15	1.38	1.10	1.44	1.04	1.51	0.99	1.59
37	1.22	1.32	1.16	1.38	1.11	1.45	1.06	1.51	1.00	1.59
38	1.23	1.33	1.18	1.39	1.12	1.45	1.07	1.52	1.02	1.58
50	1.32	1.40	1.28	1.45	1.24	1.49	1.20	1.54	1.16	1.59
70	1.43	1.49	1.40	1.52	1.37	1.55	1.34	1.58	1.31	1.61
100	1.52	1.56	1.50	1.58	1.48	1.60	1.46	1.63	1.44	1.65
150	1.61	1.64	1.60	1.65	1.58	1.67	1.57	1.68	1.56	1.69
200	1.66	1.68	1.65	1.69	1.64	1.70	1.63	1.72	1.62	1.73

Table 05: **Critical Values for the Durbin-Watson Statistic ,Level of Significance α = 0.05**

n	k = l		k = 2		k = 3		k = 4		k = 5	
	d_l	d_u	d_l	d_u	d_l	d_u	d_l	d_u	d_l	d_u
15	1.08	1.36	0.95	1.54	0.82	1.75	0.69	1.97	0.56	2.21
16	1.10	1.37	0.98	1.54	0.86	1.73	0.74	1.93	0.62	2.15
17	1.13	1.38	1.02	1.54	0.90	1.71	0.78	1.90	0.67	2.10
18	1.16	1.39	1.05	1.53	0.93	1.69	0.92	1.87	0.71	2.06
19	1.18	1.4	1.08	1.53	0.97	1.68	0.86	1.85	0.75	2.02
20	1.20	1.41	1.10	1.54	1.00	1.68	0.90	1.83	0.79	1.99
21	1.22	1.42	1.13	1.54	1.03	1.67	0.93	1.81	0.83	1.96
22	1.24	1.43	1.15	1.54	1.05	1.66	0.96	1.80	0.96	1.94
23	1.26	1.44	1.17	1.54	1.08	1.66	0.99	1.79	0.90	1.92
24	1.27	1.45	1.19	1.55	1.10	1.66	1.01	1.78	0.93	1.90
25	1.29	1.45	1.21	1.55	1.12	1.66	1.04	1.77	0.95	1.89
26	1.30	1.46	1.22	1.55	1.14	1.65	1.06	1.76	0.98	1.88
27	1.32	1.47	1.24	1.56	1.16	1.65	1.08	1.76	1.01	1.86
28	1.33	1.48	1.26	1.56	1.18	1.65	1.10	1.75	1.03	1.85
29	1.34	1.48	1.27	1.56	1.20	1.65	1.12	1.74	1.05	1.84
30	1.35	1.49	1.28	1.57	1.21	1.65	1.14	1.74	1.07	1.83
31	1.36	1.50	1.30	1.57	1.23	1.65	1.16	1.74	1.09	1.83
32	1.37	1.50	1.31	1.57	1.24	1.65	1.18	1.73	1.11	1.82
33	1.38	1.51	1.32	1.58	1.26	1.65	1.19	1.73	1.13	1.81
34	1.39	1.51	1.33	1.58	1.27	1.65	1.21	1.73	1.15	1.81
35	1.40	1.52	1.34	1.58	1.28	1.65	1.22	1.73	1.16	1.80
36	1.41	1.52	1.35	1.59	1.29	1.65	1.24	1.73	1.18	1.80
37	1.42	1.53	1.36	1.59	1.31	1.66	1.25	1.72	1.19	1.80
38	1.43	1.54	1.37	1.59	1.32	1.66	1.26	1.72	1.21	1.79
50	1.50	1.59	1.46	1.63	1.42	1.67	1.38	1.72	1.34	1.77
70	1.58	1.64	1.55	1.67	1.52	1.70	1.49	1.74	1.46	1.77
100	1.65	1.69	1.63	1.72	1.61	1.74	1.59	1.76	1.57	1.78
150	1.72	1.75	1.71	1.76	1.69	1.77	1.68	1.79	1.66	1.80
200	1.76	1.78	1.75	1.79	1.74	1.80	1.73	1.81	1.72	1.82