التوزيعات الاحتمالية المستمرة

(Continuous Probability Distributions)

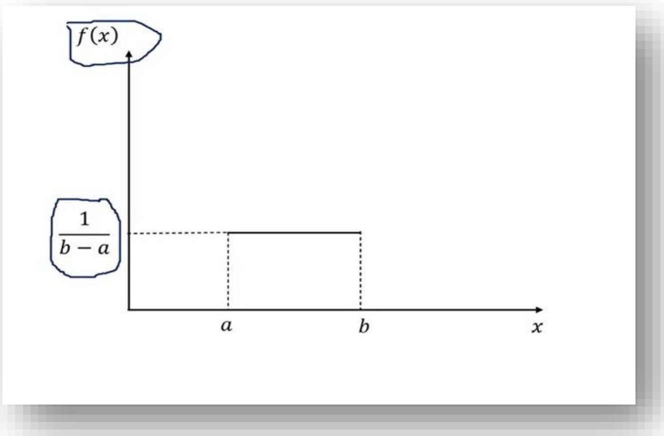
بعد التعرف على المتغيرات العشوائية المستمرة نحاول في هذه المحاضرة دراسة بعض التوزيعات الاحتمالية المستمرة وكيفية تطبيقها. على هذا الأساس سوف نتناول:

- التوزيع المنتظم؛
- التوزيع الطبيعي؛
- التوزيع الطبيعي المعياري.

1. التوزيع المنتظم (The Continuous Uniform Distributions):

1.1. دالة الكثافة والدالة التوزيع:

إذا كان المتغير العشوائي المتصل x له توزيع منتظم على القطعة المستقيمة {a, b} فإن دالة كثافة احتماله تأخذ الشكل التالي:

حيث a, b معالم هذا التوزيع.	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}; & a\le x\le b\\ 0 & ;otherwise\end{cases}$
يمكن تمثيل دالة الكثافة للتوزيع المنتظم المتصل من خلال الشكل التالي:	
يمكن إيجاد دالة التوزيع (الدالة التجميعية) كما يلي، حيث: F(x)=P(X≤x)	$F(x)=\begin{cases}0 & ;x\le 0\\ \frac{x-a}{b-a}; & a\le x\le b\\ 1 & ;x\ge b\end{cases}$

2.1. خصائص التوزيع المنتظم:

التوقع الرياضي:

$$E(x)=\frac{1}{b-a}\int_a^b xdx=\frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{2}X^2\right]_a^b$$

$$E(x)=\frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)=\frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)}$$

$$E(x)=\frac{b+a}{2}$$

التباين:

$$V(x)=\frac{1}{b-a}\int_a^b x^2dx-(\frac{b+a}{2})^2=\frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{3}X^3\right]_a^b-\frac{(b+a)^2}{4}$$

$$V(x)=\frac{1}{b-a}(\frac{b^3-a^3}{3})-\frac{(b+a)^2}{4}=\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\frac{b^2+2ab+a^2}{4}$$

$$V(x)=\frac{b^2-2ab+a^2}{12}=\frac{(b-a)^2}{12}$$

$$V(x)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

مثال: إذا كان x متغير عشوائي يمثل وقت وصول الشاحنات إلى محطة تفريغ يتبع التوزيع المنتظم والذي له دالة كثافة كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{30}; & 0\le x\le 30\\ 0 & ;otherwise\end{cases}$$

- ✓ أوجد احتمال الوصول ما بين 20 و30 دقيقة؛
- ✓ أحسب القيمة المتوقعة والتباين.
- ✓ أوجد احتمال أن تكون قد وصلت خلال الـ 5 دقائق الأخيرة على الأقل.

الحل:

الـ 5 دقائق الأخيرة على الأقل.	التوقع والتباين	الاحتمال
$P(x\ge 25)=1-P(x<25)$ $P(x\ge 25)=1-\frac{25-0}{30-0}$ $P(x\ge 25)=\frac{1}{6}$	$E(x)=\frac{b+a}{2}=15$ $V(x)=\frac{(30-0)^2}{12}=75$	$P(20\le x\le 30)=\int_{20}^{30}\frac{1}{30}dx$ $P(20\le x\le 30)=\frac{1}{30}[x]_{20}^{30}=\frac{1}{3}$

2.التوزيع الطبيعي (The Normal Distribution)

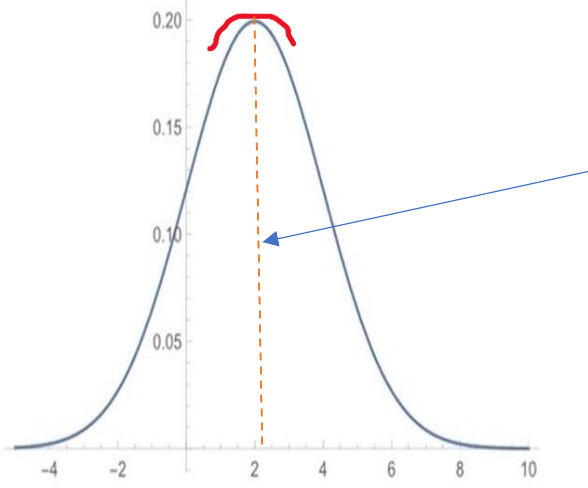
التوزيع الطبيعي هو اكثر التوزيعات الاحتمالية أهمية واستخداما في مختلف المجالات الاقتصادية والإدارية والصحية والتربوية وغيرها. أكتشف في القرن 18 من قبل لابلاس جاوس (Laplace , Gauss) .

1.2. دالة الكثافة الاحتمالية: نقول عن متغير عشوائي x أنه يخضع للتوزيع الطبيعي الذي متوسطه الحسابي μ وانحرافه المعياري σ إذا قبل قانون احتمال تابع كثافة f(x) معرفا بـ:

حيث: ❑ μ يمثل المتوسط الحسابي؛ ❑ σ الانحراف المعياري؛ ❑ e=2.71828 وهي أساس اللوغاريتم الطبيعي؛ ❑ $\pi=3.14159$ ❑ $-\infty<X<+\infty$	$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}};\quad x\in R$

نرمز لهذا التوزيع بـ $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ ويطلق عليه أيضا اسم قانون غوس أو قانون لابلاس- غوس.

2.2. التمثيل البياني للتوزيع الطبيعي:

عند رسم دالة الكثافة الاحتمالية يظهر لنا الشكل التالي: من خلال الشكل يمكن الخروج بما يلي: ❑ المنحنى يشبه الجرس؛ ❑ المنحنى متماثل حول الخط المستقيم μ ويتقارب على الجهتين عندما يؤول x إلى ما لانهاية (-+). ❑ له قمة واحدة؛ أي منوال وحيد μ= M0؛	

نلاحظ أن التوزيع الطبيعي توزيع متماثل حول المتوسط μ وهو على شكل الجرس، حيث يعتبر μ مركز التوزيع.

3.2. دالة التوزيع (الدالة التجميعية)

نلاحظ أن عملية حساب الاحتمالات من خلال دالة التوزيع صعبة جدا. ولصعوبة العملية يتم تحويل المتغير الطبيعي العام إلى متغير طبيعي معياري أو قياسي، يرمز له بالرمز Z ؛ حيث: $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$	$F(x) = P(X \le x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$

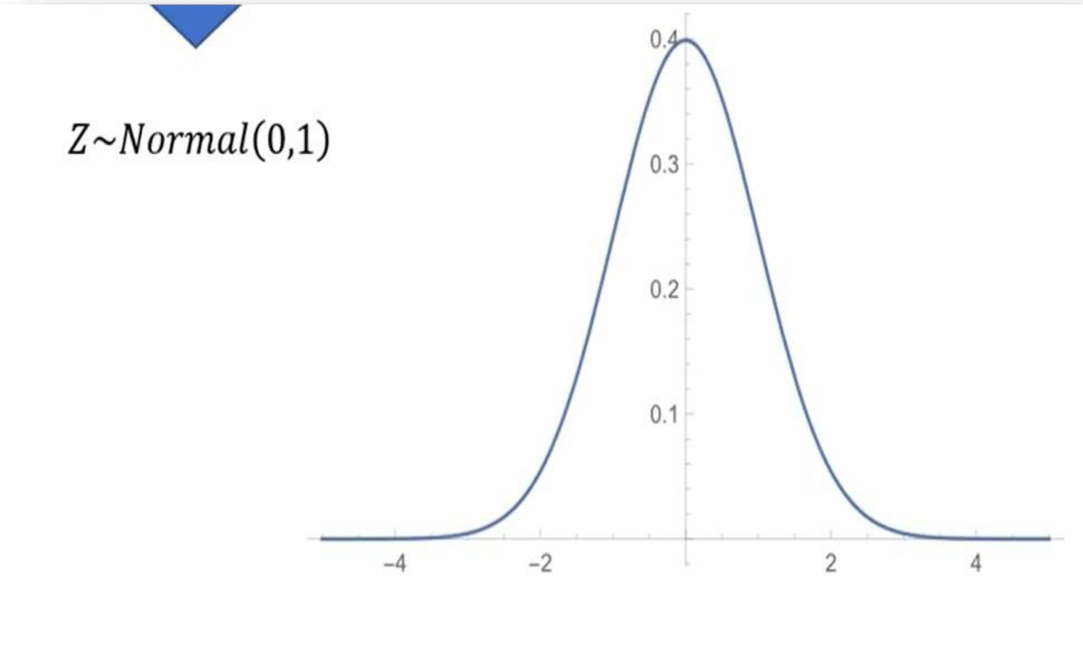
3. التوزيع الطبيعي المعياري (Standard Normal Distribution)

التوزيع الطبيعي المعياري هو التوزيع الطبيعي الذي متوسطه يساوي 0 وتباينه يساوي 1. فبعد إجراء التحويلة المعيارية Z يصبح لدينا المتغير العشوائي z يخضع للتوزيع الطبيعي المعياري الذي متوسطه μ =0 وانحرافه المعياري $\sigma = 1$.

1.3. خصائص المتغيرة المعيارية ودالة الكثافة للمتغير Z:

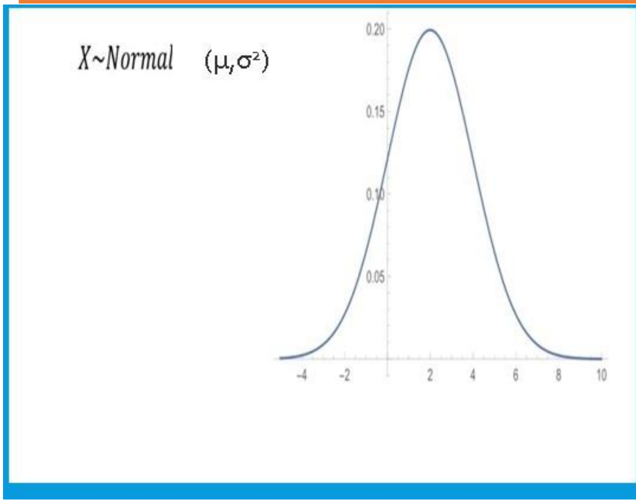
المتغيرة المعيارية	التوقع والتباين	دالة الكثافة
$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$	$E(z) = 0$ $V(z) = 1$	$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} ; -\infty < z < +\infty$

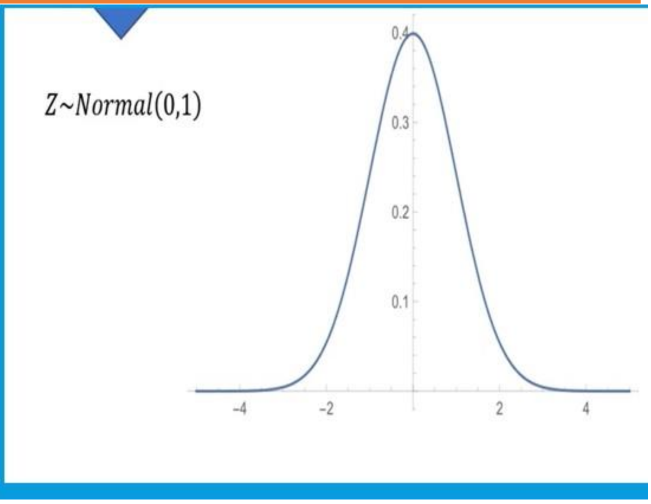
2.3. التمثيل البياني لدالة الكثافة f(z):



نلاحظ أن هذا المنحنى متناظر بالنسبة للقيمة μ=0.

طبعا كل قيمة من قيم X من التوزيع الطبيعي يقابلها قيمة من قيم Z حسب التحويلة السابقة، وتسمى قيم Z القيم المعيارية المقابلة لقيم X كما يبينه الشكل الموالي:





مثال : X متغير عشوائي حيث: $X \sim N((50,36)$ ، أوجد القيم المعيارية المقابلة لكل من $X_1=65, X_2=13, X_3=50$

X3	X2	X1	$X \sim N((50,36)$
$Z_3 = \frac{x-\mu}{\sigma}$ $Z_3 = \frac{50-50}{6} = 0$	$Z_2 = \frac{x-\mu}{\sigma}$ $Z_2 = \frac{13-50}{6} = -6.17$	$Z_1 = \frac{x-\mu}{\sigma}$ $Z_1 = \frac{65-50}{6} = 2.5$	$E(x) = 50$ $\sigma_X = 6$

3.3. حساب الاحتمالات أو المساحات تحت التوزيع الطبيعي:

بما أن التوزيع الطبيعي يحددان معالمه المتوسط الحسابي والتباين فإن المساحة على أي فترة تحت منحنى التوزيع تعتمد على كل من μ وσ. وبما أنه يمكن تحويل أي توزيع طبيعي إلى توزيع طبيعي معياري فأننا نكتفي بحساب المساحة الموجودة تحت منحنى التوزيع المعياري.

المساحات أو الاحتمالات تم عرضها في جداول إحصائية وذلك لتسهيل العملية، طبعا هناك عدة طرق لعرض جدول التوزيع الطبيعي المعياري، فمنها ما يعطي المساحة إلى يسار القيم المعيارية الموجبة والسالبة، ومنها ما يعطي المساحة بين Z=0 والقيم الموجبة لـ Z . جميع هذه الطرق متكافئة وتعطي نفس النتيجة.

ملاحظة هامة جدا: نستعمل الجدول الذي يعطي المساحة إلى يسار القيم Z الموجبة، باقي القيم نقوم ببعض الحسابات والتحويلات.

يمكن قراءة جدول التوزيع الطبيعي المعياري كما يلي:

- العمود الأيسر يعطي قيم Z ذات خانة عشرية واحدة؛
- الصف العلوي أو الخانة العلوية تعطي لنا القيمة العشرية الثانية.

مثال: كيف يمكن استعمال الجدول في حالة Z=0.36

- ❖ العمود الأيسر يعطي القيمة Z=0.3؛
- ❖ الصف العلوي يعطي القيمة العشرية 0.06.

نقوم بعملية الاسقاط بين العمود الأيسر والصف العلوي لنحصل على الاحتمال أو المساحة التي تحددها القيمة Z=0.36 والتي تساوي:

جدول التوزيع الطبيعي المعياري (z) لحساب قيم المساحات من اليسار

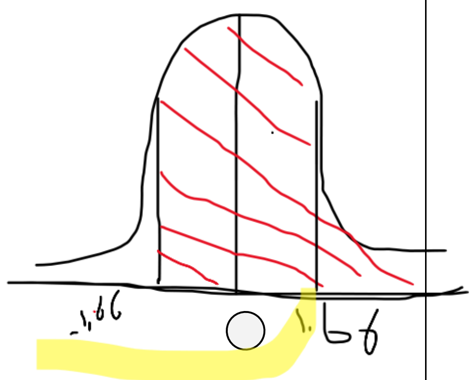
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524

إذن: $P(z \le 0.36) = 0.64058$

مثال: إذا كان **X:N(65, 36)**، أوجد الاحتمالات التالية:

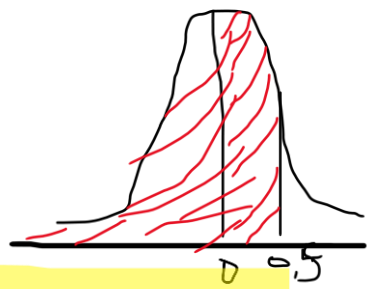
$P(x > 55), P(x \le 68), P(50 < x < 70), P(x < 57)$

الحل:

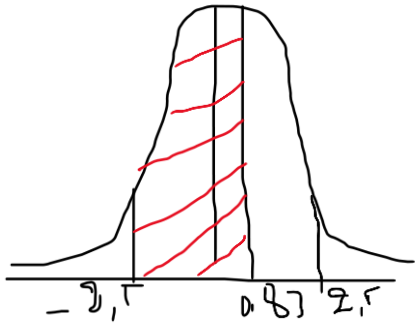
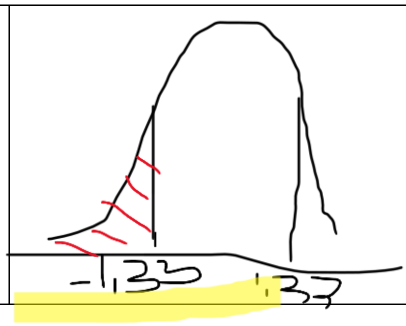


$$P(x > 55) = P(\frac{x-\mu}{\sigma} > \frac{55-65}{6}) \Rightarrow P(z > -1.66)$$
$$P(z > -1.66) = P(z \le 1.66) = 0.9515$$

ومنه نستنتج أن: $P(Z > -z) = P(Z \le z)$



$$P(x \le 68) = P(\frac{x-\mu}{\sigma} \le \frac{68-65}{6}) \Rightarrow P(z \le 0.5)$$
$$P(z \le 0.5) = 0.69146$$

$P(50 < x < 70) = P(\frac{50-65}{6} < \frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{70-65}{6})$ $P(50 < x < 70) = P(-2.5 < z < 0.83)$ $P(-2.5 < z < 0.83) = P(z < 0.83) - P(z < -2.5)$ $P(-2.5 < z < 0.83) = P(z < 0.83) - [1 - P(z < 2.5)$ $P(-2.5 < z < 0.83) = 0.79673 - [1 - 0.99379]$ $P(-2.5 < z < 0.83) = 0.79673 - 0.00621 = 0.79052$	
ومنه نستنتج أن: $P(Z < z) = 1 - P(Z \le z)$	
$P(x < 57) = P(z < \text{-}1.33) = 1 - P(z \le 1.33)$ $P(z < \text{-}1.33) = 1 - 0.90824 = 0.09176$	

ملاحظة هامة: [1]

نشير إلى أنه توجد العديد من التوزيعات الاحتمالية المستمرة منها:

- ❑ **التوزيع الأسي:** عادة ما يستخدم التوزيع الأسي في مسائل متعلقة بقياس الزمن. من ذلك مدة خدمة شباك البريد، مدة مكالمة هاتفية، مدة تفريغ باخرة شحن، مدة تصليح آلة، مدة انتظار زبون قبل الحصول على الخدمة؛
- ❑ **توزيع قاما:** يستخدم توزيع قاما لتمثيل بعض الظواهر مثل توزيع الدخل والادخار تحت شروط معينة.
- ❑ **توزيع بيتا:** وتستخدم لتمثيل بعض المتغيرات التي تتراوح بين 0 و1، مثل نسبة ما كنسبة التالف أو المبيعات.
- ❑ ....إلخ.

[1] نشير فقط أنه سوف يتم تناول التوزيعات الاحتمالية بكثير من التفصيل في الإحصاء 3.