1.1 مجال الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين

في كثير من الأحيان نرغب في مقارنة متوسطي مجتمعين ويمكن التمييز بين الحالتين التاليتين:

1.1.1 مجال الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين مستقلين

يمكن التمييز بين حالتين:

1.1.2.3 التوزيعات الطبيعية المستقلة المعلومة التباين

لدينا:

$$Z=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

ومنه:

$$P\left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\leq\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]=1-\alpha$$

بعد إجراء عمليات التبسيط والتحويل نتحصل على:

$$P\left[(\overline{X}-\overline{Y})-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\leq(\mu_1-\mu_2)\leq(\overline{X}-\overline{Y})+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]=1-\alpha$$

أي أن مجال الثقة للمتوسط للفرق $\mu_1-\mu_2$ بمستوى ثقة $100(1-\alpha)\ \%$ من الثقة هو:

$$\left[(\overline{X}-\overline{Y})-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}},(\overline{X}-\overline{Y})+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]$$

مثال:

من مجتمع طبيعي متوسطه مجهول وتباينه $\sigma^2 = 25$ سحبنا عينة عشوائية حجمها 9 فكان متوسطها 32، ومن مجتمع طبيعي آخر مستقل عن الأول متوسطه مجهول وتباينه $\sigma^2 = 40$ سحبنا عينة عشوائية حجمها 10 فكان متوسطها 47.

المطلوب: إيجاد مجال الثقة بــمعامل ثقة 95٪ للفرق بين متوسطي المجتمعين.

الحل:

نعلم أن:

$$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

ومنه مجال الثقة للفرق $\mu_1 - \mu_2$ بمستوى ثقة $100(1-\alpha)\ \%$ من الثقة هو:

$$\left[(\bar{X} - \bar{Y}) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}, (\bar{X} - \bar{Y}) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]$$

$$1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975 \Rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

ومنه مجال الثقة للفرق $\mu_1 - \mu_2$ بــمعامل ثقة 95٪ هو:

$$\left[(32 - 47) - 1.96\sqrt{\frac{25}{9} + \frac{40}{10}}, (32 - 47) + 1.96\sqrt{\frac{25}{9} + \frac{40}{10}}\right] = [-20.1, -9.9]$$

2.1.2.3 التوزيعات الطبيعية المستقلة المجهولة التباين

إذا كان σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين نستبدلهما بــ S_1^2 و S_2^2 ونميز بين حالتين:

- **حالة العينات الكبيرة:**

حسب نظرية النهاية المركزية:

$$Z=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

أي أن مجال الثقة للمتوسط للفرق $\mu_1-\mu_2$ بمستوى ثقة $100(1-\alpha)\ \%$ من الثقة بعد إجراء عمليات التبسيط والتحويل هو:

$$\left[(\bar{X}-\bar{Y})-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}},(\bar{X}-\bar{Y})+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}\right]$$

- **حالة العينات الصغيرة:**

مجال الثقة للفرق $\mu_1-\mu_2$ غير واضح باستثناء الحالة التي يكون فيها $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$.

نعلم من نظريات توزيع المعاينة أن:

$$T=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_P\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t_{n_1+n_2-2}$$

أي أن مجال الثقة للفرق $\mu_1-\mu_2$ بمستوى ثقة $100(1-\alpha)\ \%$ من الثقة بعد إجراء عمليات التبسيط والتحويل هو:

$$\left[(\bar{X}-\bar{Y})-t_{1-\frac{\alpha}{2}}S_P\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},(\bar{X}-\bar{Y})+t_{1-\frac{\alpha}{2}}S_P\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right]$$

مثال:

أوجد مجال الثقة بـــمعامل ثقة 95٪ للفرق $\mu_1-\mu_2$ إذا علمت أن حجم العينة الأولى 8 ووسطها 81.2 وتباينها 7.6 وحجم العينة الثانية 7 ووسطها وتباينها هما76.4 و 8.2 على الترتيب.

الحل:

σ_1^2 و σ_2^2 مجهولان و $n_1, n_2<30$ ومنه:

$$T=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_P\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t_{n_1+n_2-2}$$

أي أن مجال الثقة للمتوسط للفرق $\mu_1-\mu_2$ بمستوى ثقة $100(1-\alpha)\ \%$ من الثقة بعد إجراء عمليات التبسيط والتحويل هو:

$$\left[(\overline{X}-\overline{Y})-t_{1-\frac{\alpha}{2}}S_P\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},(\overline{X}-\overline{Y})+t_{1-\frac{\alpha}{2}}S_P\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right]$$

لدينا:

$$1-\alpha=0.95\Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2}=0.975\Rightarrow t_{1-\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2}=2.16$$

$$S_P^2=\frac{7.6(8-1)+8.2(7-1)}{8+7-2}=7.87$$

ومنه مجال الثقة للفرق $\mu_1-\mu_2$ بـــمعامل ثقة 95٪ هو:

$$\left[(81.8-76.4)-(2.16)(2.80)\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{7}},(81.8-76.4)+(2.16)(2.80)\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{7}}\right]=[2.28,8.52]$$

2.2.3 مجال الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين غير مستقلين

يمكن التمييز بين حالتين:

- حجم العينة $n\geq 30$:

$$\overline{D}\backsim N\left(\mu_D,\frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}\right)$$

وبمعلومية تباين عينة الفروق ووسطها كمقدرين لوسط مجتمع الفروق وتباينه يكون:

$$Z=\frac{\overline{D}-\mu_D}{\frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}}\backsim N(0,1)$$

ويمكن تعين مجال ثقة تقريبي لمتوسط مجتمع الفروق بمستوى ثقة % $100(1-\alpha)$ بعد إجراء عمليات التبسيط و التحويل كما يلي:

$$\left[\overline{D}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_D}{\sqrt{n}},\overline{D}+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}\right]$$

- حجم العينة $n<30$:

$$T=\frac{\overline{D}-\mu_D}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}}\backsim t_{n-1}$$

ويمكن تعين مجال ثقة لمتوسط مجتمع الفروق بمستوى ثقة % $100(1-\alpha)$ بعد إجراء عمليات التبسيط والتحويل كما يلي:

$$\left[\overline{\mathrm{D}}-\mathrm{t}_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\mathrm{S_D}}{\sqrt{\mathrm{n}}},\overline{\mathrm{D}}+\mathrm{t}_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\mathrm{S_D}}{\sqrt{\mathrm{n}}}\right]$$

مثال:

تم قياس نبض القلب لعينة مكونة من 6 رياضيين فكانت النتائج كما يلي:

قبل التمرين	72	70	60	65	70	67
بعد التمرين	99	90	80	93	95	90

المطلوب: إيجاد مجال الثقة بـــمعامل ثقة 90٪ لفرق متوسطي النبض بفرض أن المجتمع طبيعي.

الحل:

قبل التمرين	72	70	60	65	70	67
بعد التمرين	99	90	80	93	95	90
d_i	27	20	20	28	25	23

$$\mathrm{n}=6<30$$

ومنه:

$$\mathrm{T}=\frac{\overline{\mathrm{D}}-\mu_{\mathrm{D}}}{\frac{\mathrm{S_D}}{\sqrt{\mathrm{n}}}}\sim \mathrm{t}_{\mathrm{n}-1}$$

أي أن مجال الثقة لمتوسط مجتمع الفروق بمستوى ثقة $100(1-\alpha)$ % بعد إجراء عمليات التبسيط والتحويل هو:

$$\left[\overline{\mathrm{D}}-\mathrm{t}_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\mathrm{S_D}}{\sqrt{\mathrm{n}}},\overline{\mathrm{D}}+\mathrm{t}_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\mathrm{S_D}}{\sqrt{\mathrm{n}}}\right]$$

بالتعويض نجد مجال الثقة هو:

$$\left[23.83-(2.015)\frac{3.43}{\sqrt{6}},23.83+(2.015)\frac{3.43}{\sqrt{6}}\right]=[21.009,26.65]$$

حيث:

$$1-\alpha=0.90\Longrightarrow 1-\frac{\alpha}{2}=0.95\Longrightarrow t_{0.95,5}=2.015$$

$$\overline{D}=\frac{\sum d_i}{n}=23.83$$

$$S_D = \sqrt{\frac{\sum(d_i - \bar{D})^2}{n-1}}$$