1.1 مجال الثقة للنسبة في المجتمع

نميز بين حالتين:

1.1.1 حالة العينة المستقلة

نعلم من توزيعات المعاينة أنه حسب نظرية النهاية المركزية توزيع $\widehat{P}$ يقترب من التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي P وتباينه $\frac{pq}{n}$ إذا كان حجم العينة $n \geq 30$، وعليه:

$$\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \sim N(0,1)$$

ومنه:

$$P\left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha$$

ويمكن تعين مجال ثقة لنسبة المجتمع بمستوى ثقة $100(1-\alpha)\ \%$ بعد إجراء عمليات التبسيط والتحويل كما يلي:

$$\left[\hat{p} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}}, \hat{p} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}}\right]$$

ونلاحظ أن طرفي المجال متعلقان بمعلمتين مجهولتين p و q فيمكن تعويضها بتقديريهما غير المتحيزين $\hat{p}$ و $\hat{q}$ على الترتيب فيصبح مجال الثقة هو:

$$\left[\hat{p} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right]$$

2.3.3 حالة العينة غير المستقلة

في هذه الحالة نستعمل معامل الإرجاع لحساب تباين نسبة العينة:

$$V(\widehat{P}) = \frac{pq}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

ويمكن تعين مجال ثقة لنسبة المجتمع بمستوى ثقة $100(1-\alpha)\ \%$ بعد إجراء عمليات التبسيط والتحويل كما يلي:

$$\left[\hat{p} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}, \hat{p} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}\right]$$

مثال:

تريد إحدى الشركات القيام بتسويق منتوج جديد، وقبل القيام بذلك قامت بدراسة السوق لمعرفة مدى تفضيل الزبائن لهذا المنتوج، فسحبت عينة عشوائية من 200 زبون فوجدت منهم 140 يفضلون هذا المسحوق.

المطلوب: إيجاد مجال الثقة بــمعامل ثقة 95٪ لنسبة الزبائن الذين يفضلون هذا المنتوج.

الحل:

الصفة المدروسة هي تفضيل الزبون للمنتوج.

حجم العينة $n = 200 > 30$ ومنه حسب نظرية النهاية المركزية:

$$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \backsim N(0,1)$$

إذن مجال ثقة لنسبة المجتمع بمستوى ثقة % $100(1-\alpha)$ بعد إجراء عمليات التبسيط والتحويل هو:

$$\left[\hat{p} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right]$$

لدينا:

$$\hat{p} = \frac{140}{200} = 0.7$$

$$1 - \alpha = 0.95 \Longrightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975 \Longrightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

ومنه مجال الثقة هو:

$$\left[0.7 - 1.96\sqrt{\frac{0.7 \times 0.3}{200}}, 0.7 + 1.96\sqrt{\frac{0.7 \times 0.3}{200}}\right] = [0.63,0.76]$$

ملاحظة:

عند تقدير نسبة المجتمع p يرتكب خطأ يسمى الخطأ المطلق للتقدير هو:

$$d = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}}$$

وإذا تم تحديد أكبر خطأ مسموح به في التقدير يمكن حساب حجم العينة اللازم لتحقيق ذلك الحد من الخطأ، وبناءا عليه يكون حجم العينة المطلوب هو:

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}} \leq d \Rightarrow \sqrt{\frac{pq}{n}} \leq \frac{d}{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}} \Rightarrow \frac{pq}{n} \leq \left(\frac{d}{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right)^2 \Rightarrow n \geq pq\left(\frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{d}\right)^2$$

وفي حالة ما إذا كانت p مجهولة تعطى القيمة $\frac{1}{2}$ ويكون حجم العينة المطلوب هو:

$$n \geq \frac{1}{4}\left(\frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{d}\right)^2$$

في حالة السحب من مجتمع محدود بدون إرجاع يكون حجم العينة المطلوب:

$$n \geq pq\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\left(\frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{d}\right)^2$$

4.3 مجال الثقة للفرق بين نسبتي مجتمعين

إذا اختيرت عينتان عشوائيتان من مجتمعين مستقلين يخضع كل منهما لتوزيع الثنائي فإن الفرق بين نسبتي العينتين يخضع حسب نظرية النهاية المركزية عندما يكون حجم كل من العينتين كبيرا للتوزيع التالي:

$$Z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

ومنه:

$$P\left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}} \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] = 1 - \alpha$$

ويمكن تعين مجال ثقة للفرق بين نسبتي مجتمعين بمستوى ثقة $100(1-\alpha)\ \%$ بعد إجراء عمليات التبسيط والتحويل كما يلي:

$$\left[(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1}+\frac{p_2q_2}{n_2}},(\hat{p}_1-\hat{p}_2)+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1}+\frac{p_2q_2}{n_2}}\right]$$

ونلاحظ أن طرفي المجال متعلقان بمعلمتين مجهولتين p و q فيمكن تعويضها بتقديريهما غير المتحيزين $\hat{p}$ و $\hat{q}$ على الترتيب فيصبح مجال الثقة هو:

$$\left[(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1}+\frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}},(\hat{p}_1-\hat{p}_2)+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1}+\frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}\right]$$

مثال:

سجلت 80 حالة نجاح عملية في مشفى A من بين 90 عملية وفي المشفى B سجلت 50 عملية نجاح من بين 70 عملية.

المطلوب: إيجاد مجال الثقة بـــمعامل ثقة 90٪ للفرق بين نسبتي النجاح في المشفيين.

الحل :

الصفة المدروسة هي نجاح العملية.

لدينا:

$$\hat{p}_1=\frac{80}{90}=0.88$$
$$\hat{p}_2=\frac{50}{70}=0.71$$

$$1-\alpha=0.90 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2}=0.95 \Rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}}=1.645$$
$$\frac{\hat{p}_1-\hat{p}_2-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1}+\frac{p_2q_2}{n_2}}} \rightsquigarrow N(0,1)$$

ويمكن تعين مجال ثقة للفرق بين نسبتي مجتمعين بمستوى ثقة $100(1-\alpha)$ % بعد إجراء عمليات التبسيط والتحويل كما يلي:

$$\left[(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1}+\frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}},(\hat{p}_1-\hat{p}_2)+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1}+\frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}\right]$$

بالتعويض نجد مجال الثقة الثقة بـــمعامل ثقة 90٪ للفرق بين نسبتي النجاح في المشفيين هو :

$$[0.071,0.278]$$