الفصل الخامس : " الحل العددي للمعادلات التفاضلية العادية - مشكلة كوشي - "

المعادلات التفاضلية تستعمل في النمذجة الرياضية لبعض الظواهر الفيزيائية. المعادلة التفاضلية هي علاقة بين المتغير و مشتقاته من مختلف الدرجات. في هذا الفصل سوف نحل على المعادلات التفاضلية العادية من الدرجة الأولى ، مع الأخذ بعين الاعتبار الشرط الإبتدائي المفروض (مشكلة كوشي)

- مشكلة كوشي تعرف على أنها الحل للمعادلة التفاضلية التالية:

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = y' = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \longrightarrow \text{(الشرط الابتدائي المفروض)} \end{cases}$$

1.5 طريقة أولر (Euler's method)

تعتمد هذه الطريقة على النشر المحدود لـ y في جوار x_0:

$$y(x) = y(x_0) + (x-x_0)\frac{y'(x_0)}{1} + (x-x_0)^2\frac{y''(x_0)}{2!} + \dots + (x-x_0)^n\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}$$

وبالتحديد تعتمد على النشر المحدود من الدرجة الأولى فقط:

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x-x_0)$$

من أجل $x = x_0 \Leftarrow y(x_0) = y_0$

من أجل $x = x_1 \Leftarrow$

$$y(x_1) = y_1 = y(x_0) + y'(x_0)(x_1 - x_0)$$
$$= y_0 + y'(x_0)(x_1 - x_0)$$
$$= y_0 + h\, f(x_0, y_0) \quad / \; h = x_1 - x_0$$

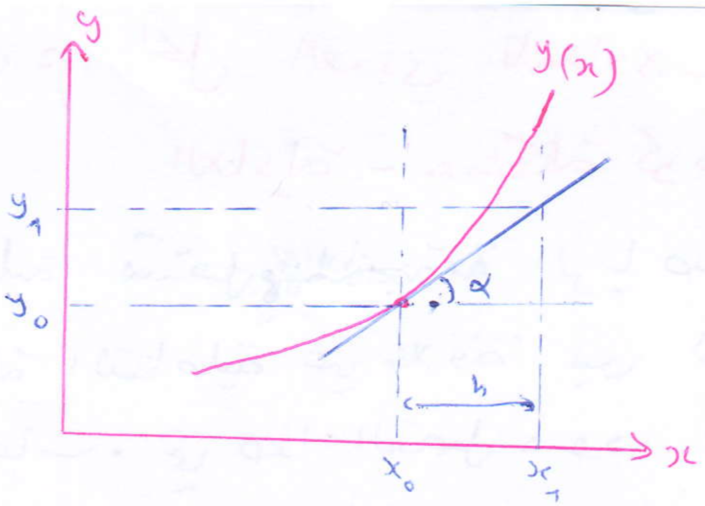
بنفس الطريقة نحصل على $y_2, y_3, \dots, y_n$:

$$y_{i+1} = y_i + h\, f(x_i, y_i) \qquad i = 0, \dots, n$$

* بيانيا ، هذه الطريقة تعتمد على المماس في النقطة x_0 لإيجاد حل للمعادلة السابقة

التمثيل البياني

لطريقة أولر



$$tg(\alpha) = \frac{y_1 - y_0}{h} \Rightarrow y_1 - y_0 = h \, tg(\alpha) \quad / \quad tg(\alpha) = y'(x_0) = f(x_0, y_0)$$

$$\Rightarrow y - y_0 = h \, f(x_0, y_0) \Rightarrow y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0)$$ نفس المعادلة السابقة

مثال 05:

لتكن المعادلة التفاضلية التالية:

$$\begin{cases} y' = x^2 + \dfrac{y}{x} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

* احسب بطريقة أولر، تقريب $y(1,2)$ علما أن خطوة التكامل هي 0,1، ثم قارن مع القيمة المضبوطة للتكامل.

2.5 طريقة أولر المحسنة :

في هذه الطريقة نقوم بتقدير المشتقة في النقطة x_m وهي منتصف النقطتين x_i و x_{i+1} حيث : $x_m = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$

المشتقة في المنتصف تحسب بالتقريب على أنها متوسط المشتقتين لبداية و نهاية المجال : $y'(x_m) = \frac{y'(x_i) + y'(x_{i+1})}{2}$

أي أن : $y_{i+1} = y_i + h\, y'(x_m) \Rightarrow y_{i+1} = y_i + h\left[\frac{y'(x_i) + y'(x_{i+1})}{2}\right]$

$$y_{i+1} = y_i + h\left[\frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})}{2}\right]$$

تبقى الآن مشكلة حساب $f(x_{i+1}, y_{i+1})$ التي تحسب y_{i+1} ، وحلها هو الرجوع إلى طريقة أولر أي : $y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i)$

أي : $\boxed{y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i + h f(x_i, y_i))\right]}$

وهي صيغة أولر المحسنة.

* خوارزمية الطريقة :

من أجل :

$$\begin{cases} x = x_i \\ k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_i + h, y_i + h k_1) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \end{cases}$$

مثال 2.5 نعيد المثال السابق بهذه الطريقة (اولر المحسنة)

3.5 طريقة "رانج - كويطا" من الدرجة الرابعة

"Runge-Kutta method of order 4"

هذه الطريقة هي الأكثر استعمالا و أكثر دقة، وهي من الدرجة الرابعة. يكون فيها المجال $[a,b]$ مقسوما الى n مجال جزئي عرضه h ، خوارزمية هذه الصيغة تكتب كما يلي :

$$
\begin{cases}
x = x_i & \text{من أجل} \\
k_1 = f(x_i, y_i) \\
k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_1\right) \\
k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_2\right) \\
k_4 = f(x_i + h, y_i + h k_3) \\
y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
\end{cases}
$$

مثال 3.5 : نفس المثال السابق (مثال 1.5) نحسب $f(1,2)$ باستعمال طريقة (Runge - Kutta) :

الخلاصة:

تطرقنا في هذا الفصل إلى طرق بسيطة لحساب المعادلات التفاضلية البسيطة. طريقة "Euler" هي الطريقة الأسرع من حيث عدد عمليات الحسابية لكن دقتها ضعيفة جدا، في حين أن طريقة "Runge-Kutta" من الدرجة الرابعة فيها عمليات حسابية أكبر لكن دقتها جيدة جدا.