المحور03: الإرتباط الذاتي للأخطاء

المحاضرة 06 :

رابعا: الكشف عن مشكل الارتباط الذاتي للأخطاء:

للكشف عن وجود هذا المشكل يتعين علينا التمييز بين درجات الارتباط الذاتي كما يلي:

1- اختبارات الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى:

للكشف عن الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى هناك العديد من الاختبارات، لعل أهمها ما يلي:

1-1- اختبار DURBIN-WATSON:

يعتبر هذا الاختبار أكثر الاختبارات استخداما في مختلف العينات، وهو مخصص للكشف عن الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى فقط.

فإذا كان لدينا النموذج الخطي المتعدد التالي: $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \cdots\cdots + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t$ ، والذي يعاني من مشكل ارتباط ذاتي للأخطاء من الدرجة الأولى، حسب الشكل التالي: $\varepsilon_t = \rho \cdot \varepsilon_{t-1} + \mu_t$.

حيث: ρ: معامل الارتباط الذاتي للأخطاء

μ_t: متغير عشوائي، من خصائصه: $E(\mu_t) = 0$. $V(\mu_t) = \delta_\mu^2$. $E(\mu_i \mu_j) = 0 \quad \forall i \neq j$

فإن اختبار DW يستخدم لاختبار ثلاث فروض كمايلي:

- وجود ارتباط ذاتي موجب، فيأخذ الاختبار الشكل التالي:

$$\begin{cases} H_0 : \rho = 0 \\ H_1 : \rho > 0 \end{cases}$$

- وجود ارتباط ذاتي سالب، فيأخذ الاختبار الشكل التالي:

$$\begin{cases} H_0 : \rho = 0 \\ H_1 : \rho < 0 \end{cases}$$

- وجود ارتباط ذاتي موجب أو سالب، فيأخذ الاختبار الشكل التالي:

$$\begin{cases} H_0 : \rho = 0 \\ H_1 : \rho \neq 0 \end{cases}$$

وتنحصر خطوات هذا الاختبار في النقاط التالية:

- تقدير معلمات النموذج الخطي بطريقة المربعات الصغرى العادية.

- ايجاد بواقي التقدير كمايلي: $e_t = Y_t - \hat{Y}_t$.
- حساب الإحصائية DW التي تعطى بالعلاقة التالية: $DW = \sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2 \Big/ \sum_{t=1}^{n} e_t^2$.

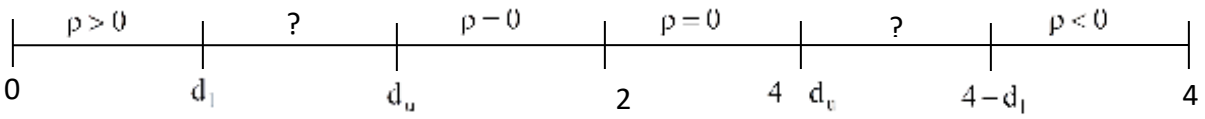
$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t^2 + e_{t-1}^2 - 2e_t e_{t-1})}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} = \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t^2 + \sum_{t=2}^{n} e_{t-1}^2 - 2\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

$$\approx 2 - \frac{2\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

$$\approx 2 - 2\rho \approx 2(1-\rho)$$

بعد حساب DW نقرنها مع القيمتين المجدولتين، d_l التي تمثل الحد الأدنى لانعدام الارتباط الذاتي، و d_u التي تمثل الحد الأقصى لانعدام الارتباط الذاتي، وذلك حسب عدد المشاهدات n ، وعدد المتغيرات التفسيرية في النموذج عند درجة معنوية 5%.

ويتم قبول ورفض الفرضيتين حسب المخطط التالي:[1]



قيمة DW الوسطية هي 2 وعندها ينعدم الارتباط الذاتي، أي: $\rho = 0$.

ويتم قبول ورفض H_0 حسب الحالات التالية:

$0 < DW < d_l$ وجود ارتباط ذاتي موجب.

$d_l < DW < d_u$ مجال غير محسوم، هناك شك في وجود أو عدم وجود ارتباط ذاتي.

$d_u < DW < 4 - d_u$ عدم وجود ارتباط ذاتي.

$4 - d_u < DW < 4 - d_l$ مجال غير محسوم، هناك شك في وجود أو عدم وجود ارتباط ذاتي.

$4 - d_l < DW < 4$ وجود ارتباط ذاتي سالب.

[1] - Régis Bourbonnais, Op cit, P129.

شروط استخدام اختبار DURBIN-WATSON:

هناك عدد من الشروط الواجب توفرها ليكون استخدام هذا الاختبار صحيحا، وهي:

- الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى فقط، والذي يأخذ الشكل التالي: $\varepsilon_t = \rho \cdot \varepsilon_{t-1} + \mu_t$ ، أي لا يصلح للكشف عن الارتباط الذاتي من درجة أعلى من الدرجة الأولى.
- لابد أن يحتوى النموذج على حد ثابت، كأن يأخذ النموذج الشكل التالي:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \cdots\cdots + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t$$

أما إذا كان النموذج لا يحتوي على حد ثابت، فيتعين إعادة تقديره بوجود هذا الحد، للتأكد من وجود أو عدم وجود الارتباط الذاتي للأخطاء.

- أن لا يظهر المتغير التابع بفترات إبطاء في جملة المتغيرات المستقلة.

2-1- اختبار DURBIN'S H TEST لإبطاء المتغير التابع:

قلنا سابقا أن اختبار DW غير قابل للتطبيق عندما يتضمن النموذج إبطاء للمتغير التابع كمتغير تفسيري، فإذا كان النموذج المراد اختباره يأخذ الشكل التالي:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \cdots\cdots + \beta_k X_{kt} + \gamma Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

فإنه لا يمكننا تطبيق اختبار DW، وعليه صمم DURBIN (1970) إحصائية اختبار يمكن استخدامها لمثل هذا النموذج، وتأخذ هذه الاحصائية الشكل التالي:

$$h = \left(1 - \frac{DW}{2}\right)\sqrt{\frac{n}{1 - n\hat{\delta}_{\hat{\gamma}}^2}}$$

حيث: n : عدد المشاهدات، DW : إحصائية DURBIN-WATSON، $\hat{\delta}_{\hat{\gamma}}^2$: التباين المقدر لمعلمة إبطاء المتغير التابع، مع ملاحظة أن هذه الإحصائية في العينات الكبيرة تتبع التوزيع الطبيعي، وتشمل خطوات اختبار H TEST مايلي:

- تقدير النموذج الخطي باستخدام OLS ثم الحصول على البواقي وحساب الاحصائية DW.
- شكل الاختبار: يكون كمايلي:

$$\begin{cases} H_0 : \rho = 0 \\ H_1 : \rho \neq 0 \end{cases}$$

- حساب الاحصائية H-STATISTICS من العلاقة: $h = \left(1 - \frac{DW}{2}\right)\sqrt{\frac{n}{1 - n\hat{\delta}_{\hat{\gamma}}^2}}$.

- **قرار الاختبار:** من خلال مقارنة الاحصائية h بالقيم الحرجة (في العينات الكبيرة وعند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$ تكون القيمة الحرجة $Z = \pm 1.96$):
  - ✓ نرفض H_0 إذا كان $|h| \geq 1.96$ ، أي وجود ارتباط ذاتي بين الأخطاء.
  - ✓ نرفض H_1 إذا كان $|h| < 1.96$ ، أي عدم وجود ارتباط ذاتي بين الأخطاء.

2- اختبارات الارتباط الذاتي من درجة أعلى من الدرجة الأول:

من بين الاختبارات التي تستخدم للكشف عن الارتباط الذاتي لدرجة أعلى من الدرجة الأولى نجد مايلي:

2-1- اختبار BREUSCH-GODFREY:

نظرا للعيوب الناتجة عن اختبار DURBIN-WATSON طور كل من BREUSCH (1978) و GODFREY (1978) اختبار LM ، والذي يتميز بكونه يسمح باختبار الارتباط الذاتي لدرجات مختلفة، حيث أن الارتباط الذاتي من الدرجة m يمكن صياغته وفق العلاقة التالية:

$$\varepsilon_t = \rho_1 \cdot \varepsilon_{t-1} + \rho_2 \cdot \varepsilon_{t-2} + \cdots\cdots + \rho_m \cdot \varepsilon_{t-m} + \mu_t$$

حيث: $\rho_i \quad / i = 1 \cdots\cdots m$: معاملات الارتباط الذاتي للأخطاء.

μ_t: متغير عشوائي، من خصائصه: $E(\mu_t) = 0 \quad . \quad V(\mu_t) = \delta_\mu^2 \quad . \quad E(\mu_i \mu_j) = 0 \quad \forall i \neq j$

بالتعويض في النموذج الخطي المتعدد نجد:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 \cdot X_{2t} + \beta_3 \cdot X_{3t} + \cdots\cdots + \beta_k \cdot X_{kt} + \rho_1 \cdot \varepsilon_{t-1} + \rho_2 \cdot \varepsilon_{t-2} + \cdots\cdots + \rho_m \cdot \varepsilon_{t-m} + \mu_t$$

وتكون فرضية استقلالية الأخطاء (عدم وجود ارتباط ذاتي) كمايلي:

$$H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \cdots\cdots = \rho_m = 0 \qquad / i = 1 \cdots\cdots m$$

بينما الفرضية البديلة تكون كمايلي:

$$H_1 : \exists i \quad / \quad \rho_i \neq 0 \qquad i = 1 \cdots\cdots m$$

لإجراء هذا الاختبار نتبع بالخطوات التالية:

- تقدير النموذج الخطي المتعدد بطريقة OLS، ثم حساب بواقي التقدير:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \cdots\cdots + \beta_k X_{kt} + \mu_t$$
$$e_t = Y_t - \hat{Y}_t = Y_t - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2t} - \hat{\beta}_3 X_{3t} - \cdots\cdots - \hat{\beta}_k X_{kt}$$

- تقدير النموذج التالي بطريقة OLS، وحساب معامل التحديد R^2

$$e_t = \beta_1 + \beta_2 \cdot X_{2t} + \beta_3 \cdot X_{3t} + L\ L + \beta_k \cdot X_{kt} + \rho_1 \cdot e_{t-1} + \rho_2 \cdot e_{t-2} + L\ L + \rho_m \cdot e_{t-m} + \mu_t$$

- حساب الاحصائية LM (LAGRANGE MULTIPLLER):

$$LM = n \cdot R^2$$

الاحصائية LM تتبع توزيع khi – deux بدرجة حرية m ، أي: $LM \to \chi^2_m$.

- **القرار:**

- إذا كانت: $LM \geq \chi^2_m$ عند مستوى معنوية معين، فإننا نقبل الفرضية $H_1 : \exists i \ / \ \rho_i \neq 0$ ، أي وجود ارتباط ذاتي.
- إذا كانت: $LM < \chi^2_m$ عند مستوى معنوية معين، فإننا نقبل الفرضية $H_0 : \rho_1 = \rho_2 = L\ L = \rho_m = 0$ ، أي عدم وجود ارتباط ذاتي.

2-2- اختبار LJUNG- BOX:

هناك اختبار بسيط للكشف عن الارتباط الذاتي للأخطاء لرتبة أعلى من الدرجة الأولى، فإذا كان لدينا النموذج الخطي المتعدد التالي: $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \cdots\cdots + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t$ ، والذي يعاني من مشكل الارتباط الذاتي من الدرجة m ، والذي يمكن صياغته وفق العلاقة التالية:

$$\varepsilon_t = \rho_1 \cdot \varepsilon_{t-1} + \rho_2 \cdot \varepsilon_{t-2} + \cdots\cdots + \rho_m \cdot \varepsilon_{t-m} + \mu_t$$

حيث: $i = 1L\ L\ m /$ ρ_i: معاملات الارتباط الذاتي للأخطاء.

μ_t: متغير عشوائي، من خصائصه: $E(\mu_t) = 0$. $V(\mu_t) = \delta^2_\mu$. $E(\mu_i \mu_j) = 0 \quad \forall i \neq j$

فإنه يرمز لدالة الارتباط الذاتي بتأخير m بالرمز ρ_m وتعطى بالعلاقة التالية: $\rho_m = \frac{\gamma_m}{\gamma_0} = \frac{\text{cov}(\varepsilon_t . \varepsilon_{t-m})}{\delta^2_\varepsilon}$.

فمن أجل $m = 0$ يكون $\rho_m = 1$ ، وتتراوح معاملات دالة الارتباط الذاتي بين 1- و 1. ويسمى التمثيل البياني لدالة الارتباط الذاتي بمختلف التأخيرات بـ: CORRÉLOGRAMME .

يقوم هذا الاختبار على عدة خطوات، تتمثل في:

- تقدير النموذج الخطي المتعدد بطريقة OLS، ثم حساب بواقي التقدير:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \cdots\cdots + \beta_k X_{kt} + \mu_t$$
$$e_t = Y_t - \hat{Y}_t = Y_t - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2t} - \hat{\beta}_3 X_{3t} - \cdots\cdots - \hat{\beta}_k X_{kt}$$

- حساب معاملات دالة الارتباط الذاتي بالعلاقة التالية:

$$\hat{\rho}_m = \frac{\hat{\gamma}_m}{\hat{\gamma}_0} = \frac{\text{cov}(e_t . e_{t-m})}{\delta_e^2} = \frac{\frac{\sum(e_t - \bar{e})(e_{t-m} - \bar{e})}{n}}{\frac{\sum(e_t - \bar{e})^2}{n}} = \frac{\sum e_t e_{t-m}}{\sum e_t^2}$$

أما فرضيات الاختبار فتكون كمايلي:

$H_0 = \rho_m = 0$: معامل دالة الارتباط الذاتي معدوم

$H_1 = \rho_m \neq 0$: معامل دالة الارتباط الذاتي غير معدوم

وأما قرار الاختبار فيكون كمايلي:

- إذا كان الصفر ضمن حدود مجال الثقة فإننا نقبل الفرضية $H_0 = \rho_m = 0$ ، أي أن معامل دالة الارتباط الذاتي معدوم، وبالتالي لا يوجد ارتباط ذاتي للأخطاء من الدرجة m.
- إذا كان الصفر خارج حدود مجال الثقة فإننا نقبل الفرضية $H_1 = \rho_m \neq 0$ ، أي أن معامل دالة الارتباط الذاتي غير معدوم، وبالتالي يوجد ارتباط ذاتي للأخطاء من الدرجة m.

وتكمن صعوبة إجراء هذا الاختبار في العينات الكبيرة حيث يكون طول التأخير كبيرا، فمثلا في سلسلة زمنية من 200 مشاهدة يكون طول التأخير على الأقل 50 مشاهدة، وبالتالي نكون ملزمين بحساب 50 معامل ارتباط ذاتي وإيجاد مجال الثقة لكل معامل وإجراء الاختبار لكل معامل على حدى. لذا يجب استعمال اختبار آخر يعرف بـ: إحصائية Q لـ: LJUNG-BOX والتي تختبر المعنوية الإحصائية لكل معاملات دالة الارتباط الذاتي لمختلف التأخيرات في نفس الوقت، وتعطى هذه الإحصائية بالعلاقة التالية: $Q = n\sum_{i=1}^{m}\hat{\rho}_i^2$.

حيث: n : حجم العينة، m : درجة الارتباط الذاتي.

هذه الإحصائية Q توزيع KHI-DEUX بدرجة حرية m ، ويكون قرار الاختبار بناءا على مقارنة الإحصائية Q مع القيمة المجدولة χ_m^2 عند مستوى معنوية معين ($\alpha = 5\%$).

- إذا كانت $Q \geq \chi_m^2$ فإننا نقبل الفرضية على أنه يوجد على الأقل معامل من معاملات دالة الارتباط الذاتي غير معدوم، وبالتالي وجود ارتباط ذاتي للأخطاء.

- إذا كانت $Q < \chi^2_m$ فإننا نقبل الفرضية على أنه لا يوجد أي معامل من معاملات دالة الارتباط الذاتي غير معدوم، وبالتالي عدم وجود ارتباط ذاتي للأخطاء.

خامسا: التعامل مع مشكل الارتباط الذاتي بين الأخطاء

في حالة وجود ارتباط ذاتي بين الأخطاء فإننا نستعمل الطريقة التالية للتخلص من هذه المشكلة:

لنفترض أن النموذج الأصلي يأخذ الصيغة التالية:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \cdots\cdots + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t \qquad (I)$$

بعد إجراء اختبار DW تبين وجود ارتباط ذاتي بين الأخطاء.

لدينا: $$Y_{t-1} = \beta_1 + \beta_2 X_{2t-1} + \beta_3 X_{3t-1} + \text{L L} + \beta_k X_{kt-1} + \varepsilon_{t-1} \qquad (II)$$

بضرب (II) في $\hat{\rho}$ نجد: $$\hat{\rho} Y_{t-1} = \hat{\rho}\beta_1 + \beta_2 \hat{\rho} X_{2t-1} + \beta_3 \hat{\rho} X_{3t-1} + \text{L L} + \beta_k \hat{\rho} X_{kt-1} + \hat{\rho}\varepsilon_{t-1}$$

نقوم بطرح (II) من (I) فنجد:

$$Y_t - \hat{\rho} Y_{t-1} = \beta_1(1-\hat{\rho}) + \beta_2(X_{2t} - \hat{\rho} X_{2t-1}) + \cdots + \beta_k(X_{kt} - \hat{\rho} X_{kt-1}) + (\varepsilon_t - \hat{\rho}\varepsilon_{t-1})$$

$$Y_t^* = \beta_1^* + \beta_2 X_{2t}^* + \cdots\cdots\cdots\cdots + \beta_k X_{kt}^* + v_t$$

حيث:

$$\begin{aligned} Y_t^* &= Y_t - \hat{\rho} Y_{t-1} \\ X_{2t}^* &= X_{2t} - \hat{\rho} X_{2t-1} \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ X_{kt}^* &= X_{kt} - \hat{\rho} X_{kt-1} \end{aligned}$$

بمعاينة هذه المعادلة نجد أننا إذا قمنا باستخدامها في التقدير فإننا نزيل أثر الارتباط الذاتي من البيانات ممثلا في $\hat{\rho}$ ، وفي هذه الحالة نحصل على القيم المقدرة $\hat{\beta}_1^*$. $\hat{\beta}_2$ ..... $\hat{\beta}_k$ بعد استبعاد أثر الارتباط الذاتي. هذه الطريقة تعرف بطريقة شبه الفروقات من الدرجة الأولى.

ونستخدم القيم المعدلة بدلا من القيم الأصلية Y_t . X_{it} ، عند استخدام طريقة المربعات الصغرى في عملية التقدير، ولعل هذا يؤذي إلى فقدان مشاهدة من المشاهدات وهي المشاهدة الأولى، وفي هذه الحالة يتم تعويضها بـ: $Y_1\sqrt{1-\hat{\rho}^2}$ بالنسبة لـ: Y_1 و $x_{i1}\sqrt{1-\hat{\rho}^2}$ بالنسبة لـ: X_{i1}.