المحور03: الإرتباط الذاتي للأخطاء

المحاضرة 05 :

يعد الارتباط الذاتي Autocorrelation نوعا خاصا من أنواع الارتباطات الاعتيادية، فعند الحديث عن حالة الارتباط بين متغير تابع وآخر مستقل، فإننا نقيس ذلك بمعامل الارتباط Corrélation Coefficient، وعند الحديث عن درجة الارتباط بين المتغيرات المستقلة مع بعضها البعض، فإننا نستعين بمصفوفة معاملات الارتباط الجزئية Partial Correlation Coefficients Matrix.

أما الارتباط الذاتي الذي نحن بصدد تناوله فينحصر في العلاقة بين القيم المتتالية للمتغير العشوائي ε_t، أي درجة الارتباط بين قيمه في الفترة t والفترة $(t-1)$، أو قيمته في الفترة اللاحقة $(t+1)$، ضمن سلسلة مشاهدات هذا المتغير.

أولا: طبيعة مشكلة الارتباط الذاتي للأخطاء

يشير الارتباط الذاتي بوجه عام إلى وجود ارتباط بين القيم المشاهدة لنفس المتغير، وعادة ما يشير هذا المصطلح في نماذج الانحدار إلى وجود ارتباط بين القيم المتتالية للمتغير العشوائي. فمن بين الفرضيات الكلاسيكية للنماذج الخطية نجد فرضية استقلال الاخطاء فيما بينها، وبالتالي فمصفوفة التباين والتباين المشترك تعطى كمايلي:

$$\Omega_\varepsilon = E(\varepsilon\varepsilon') = E\left(\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \vdots\\ \vdots\\ \varepsilon_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2\cdots\cdots\varepsilon_n\end{pmatrix}\right) = E\begin{pmatrix}\varepsilon_1^2 & \varepsilon_1\varepsilon_2 & \cdots & \cdots & \varepsilon_1\varepsilon_n\\ \varepsilon_1\varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 & \cdots & \cdots & \varepsilon_2\varepsilon_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots\\ \varepsilon_1\varepsilon_n & \varepsilon_2\varepsilon_n & \cdots & \cdots & \varepsilon_n^2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}E(\varepsilon_1^2) & E(\varepsilon_1\varepsilon_2) & \cdots & \cdots & E(\varepsilon_1\varepsilon_n)\\ E(\varepsilon_1\varepsilon_2) & E(\varepsilon_2^2) & \cdots & \cdots & E(\varepsilon_2\varepsilon_n)\\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots\\ E(\varepsilon_1\varepsilon_n) & E(\varepsilon_2\varepsilon_n) & \cdots & \cdots & E(\varepsilon_n^2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\delta_\varepsilon^2 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & \delta_\varepsilon^2 & \cdots & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \delta_\varepsilon^2\end{pmatrix} = \delta_\varepsilon^2\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1\end{pmatrix} = \delta_\varepsilon^2 I_n$$

في حالة عدم تحقق هذه الفرضية فهذا يدل على وجود ارتباط ذاتي للأخطاء، فمصفوفة التباين والتباين المشترك للأخطاء $\Omega_\varepsilon = E(\varepsilon\varepsilon') \neq \delta_\varepsilon^2 I_n$، لا تتضمن الصفر خارج قطرها، وكنتيجة لذلك تكون المقدرات متحيزة وتباينها ليس هو الأدنى.

1- أشكال الارتباط الذاتي:

يمكن تصنيف الارتباط الذاتي إلى عدة أنواع، نذكر منها ما يأتي:

1-1- **الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى First Order Autocorrelation Scheme 'AR(1)':** عندما يكون الارتباط الذاتي للخطأ العشوائي أو المتغير العشوائي من الدرجة الأولى، فإنه يكون غير مستقل ويتبع النموذج التالي:

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$$

حيث: ρ معلمة تقيس درجة الارتباط، و $-1 \le \rho \le 1$.

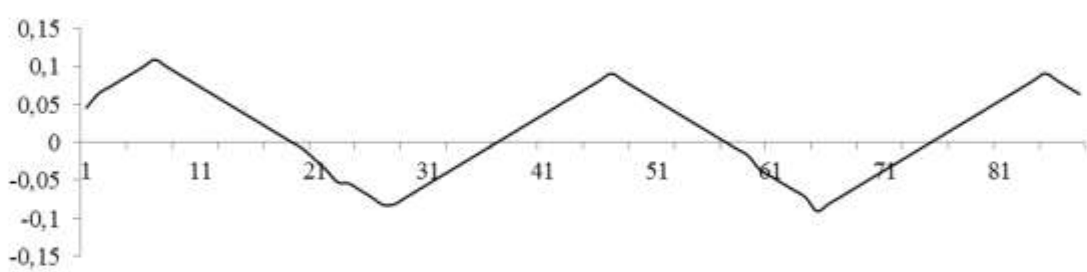
1-2- **الارتباط الذاتي من الدرجة m Order Autocorrelation Scheme 'AR(m)' m:** في هذه الحالة يرتبط حد الخطأ العشوائي للفترة الحالية t بالحدود العشوائية للفترات السابقة حتى الفترة m، وهو ما يمكن توضيحه بالصيغة التالية:

$$\varepsilon_t = \rho_1\varepsilon_{t-1} + \rho_2\varepsilon_{t-2} + \rho_3\varepsilon_{t-3} + \cdots\cdots + \rho_m\varepsilon_{t-m} + u_t$$

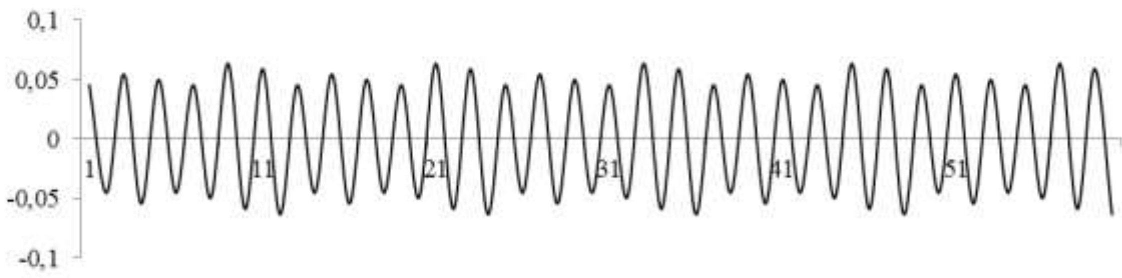
1-3- **الارتباط الذاتي الموجب والارتباط الذاتي السالب Positive Autocorrelation and Negative Autocorrelation:**

وفقا لهذا التصنيف يصنف الارتباط الذاتي إلى موجب وسالب حسب إشارة القيم المتتالية للمتغير العشوائي كمايلي:

- **الارتباط الذاتي الموجب Positive Autocorrelation:** يحدث هذا النوع في حالة ما أخذت القيم المتتالية للمتغير العشوائي نفس الإشارة، فقد تكون موجبة لفترات وقد تكون سالبة لفترات أخرى.



- **الارتباط الذاتي السالب Negative Autocorrelation:** يحدث هذا النوع في حالة ما أخذت القيم المتتالية للمتغير العشوائي إشارات متناوبة، فقد تكون موجبة لفترة وتكون سالبة في الفترة الموالية.



2- أسباب حدوث الارتباط الذاتي:

- حذف بعض المتغيرات التفسيرية ذات القيم المرتبطة ذاتيا، فمن المعروف أن حذف بعض المتغيرات من نموذج الانحدار يترتب عليه ما يسمى بخطأ الحذف، وهذا ينعكس بدوره في قيم الحد العشوائي[1]. فإذا افترضنا أن المتغير التابع Y_t مرتبط بالمتغيرين X_{2t} و X_{3t}، وأننا اسقطنا بطريق الخطأ المتغير X_{3t} ولم ندرجه في النموذج، فسيتم إلتقاط تأثير المتغير X_{3t} بحد الخطأ أو المتغير العشوائي ε_t، خاصة اذا كان المتغير X_{3t} يمثل سلسلة زمنية عبارة عن امتداد لماضيها القريب، أي X_{3t} يعتمد على X_{3t-1} و X_{3t-2}، هذا ما يؤدي الى ارتباط محتوم بين ε_t و ε_{t-1} و ε_{t-2}.
- سوء توصيف النموذج (MISSPECIFICATION)، كأن يرتبط المتغير التابع Y_t بالمتغير X_{2t} بعلاقة تربيعية من الشكل: $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t}^2 + \varepsilon_t$، في حين أننا حددنا وقدرنا نموذجا خطيا من الشكل: $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \varepsilon_t$ فإننا سنحصل على حدود خطأ توصيف خطي يعتمد في الأساس على X_{2t}^2، فإذا زاد X_{2t} أو تناقص خلال الزمن فإن ε_t ستتصرف بنفس التصرف، محدثة ارتباطا ذاتيا.[2]
- عدم دقة بيانات السلاسل الزمنية، أي الأخطاء المنهجية في القياس.

ثانيا: تقدير معامل الارتباط الذاتي:

هناك العديد من الطرق لتقدير معامل الارتباط الذاتي، نذكر من أهمها:

1- طريقة COCHRANE-OREUTTE: قدم كلل من COCHRANE وOREUTTE بحثا مشتركا سنة 1949 حول طريقة تقدير معامل الارتباط الذاتي ρ، حيث اقترحا أن يتم تقديره وفق العلاقة التالية:[3]

$$\hat{\rho} = \frac{\sum e_t \cdot e_{t-1}}{\sum e_{t-1}^2}$$

حيث: e: تمثل بواقي تقدير النموذج، أي: $e_t = Y_t - \hat{Y}_t$ و $e_{t-1} = Y_{t-1} - \hat{Y}_{t-1}$.

---

[1] - أحمد سلطان محمد، هيثم يعقوب يوسف وآخرون، مرجع سبق ذكره، ص 67.
[2] - خالد محمد السواعي، مرجع سبق ذكره، ص 279.
[3] - شيخي محمد، مرجع سبق ذكره، ص 105.

2- **طريقة Durbin-Watson:** حسب هذه الطريقة يتم تقدير معامل الارتباط الذاتي ρ من خلال احصائية Durbin-Watson، والتي يرمز لها عادة بالرمز DW ، والتي تعطى بالعلاقة التالية:

$$DW = 2 \cdot (1 - \hat{\rho})$$

وبالتالي يمكن تقدير معامل الارتباط الذاتي كما يلي:

$$\hat{\rho} = 1 - \frac{DW}{2}$$

3- **طريقة Theil-Nagar:** وهي طريقة مطورة لطريقة Durbin-Watson في تقدير معامل الارتباط الذاتي ρ، إذ أخذ الباحثان Theil وNagar في بحثهما سنة 1961 عدد المتغيرات المستقلة k وحجم العينة n في تقدير هذا المعامل، من خلال الصيغة التالية:

$$\hat{\rho} = \frac{n^2\left(1 - \frac{DW}{2}\right) + (k+1)^2}{n^2 - (k+1)^2}$$

ثالثا: آثار مشكلة الارتباط الذاتي للأخطاء:

تتمثل أهم الآثار الناتجة عن مشكل الارتباط الذاتي للأخطاء فيمايلي:

- لا يؤثر وجود الارتباط الذاتي على تحيز المعلمات المقدرة بطريقة المربعات الصغرى العادية (OLS)، حيث تبقى هذه المقدرات مقدرات غير متحيزة. كما تبقى متسقة، إلا أنها تفقد خاصية الكفاءة.
- ينتج عن مشكل الارتباط الذاتي صغر حجم الأخطاء المعيارية للمعلمات المقدرة بطريقة (OLS)، ما يؤدي إلى:
  - ✓ تضخيم معنوية المعلمات المقدرة، المبالغة في قيمة معامل التحديد.
  - ✓ عدم دقة مجالات الثقة للمعلمات المقدرة، لإعتمادها على الأخطاء المعيارية في حسابها.
  - ✓ عدم صلاحية اختباري Student وFisher، كون تباين المتغير العشوائي المقدر يكون متحيزا نحو الأسفل، وبالتالي تكون تباين المتغير العشوائي أقل من تباينه الفعلي.
  - ✓ يصبح التنبؤ غير دقيق، لاعتماده على التباين المقدر للمتغير العشوائي، حيث يمكن الحصول على تنبؤات أكثر دقة باستخدام طرق أخرى في تقدير النموذج، كطريقة المربعات الصغرى المعممة Method of Generalized Least Square (GLS).
  - ✓ تصبح التقديرات حساسة للتقلب من عينة إلى أخرى.