المحور02: الانحدار الخطي المتعدد

المحاضرة 03 :

أولا: تقديم نموذج الانحدار الخطي المتعدد

1- الشكل العام: النموذج الخطي المتعدد يأخذ الشكل التالي:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \cdots\cdots + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t$$

ويمكن كتابته على شكل المصفوفات كالتالي:

$$\begin{aligned}
Y_1 &= \beta_1 + \beta_2 X_{21} + \beta_3 X_{31} + \cdots\cdots + \beta_k X_{k1} + \varepsilon_1 \\
Y_2 &= \beta_1 + \beta_2 X_{22} + \beta_3 X_{32} + \cdots\cdots + \beta_k X_{k2} + \varepsilon_2 \\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\
Y_n &= \beta_1 + \beta_2 X_{2n} + \beta_3 X_{3n} + \cdots\cdots + \beta_k X_{kn} + \varepsilon_n
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & X_{21} & X_{31} & \cdots & X_{k1} \\ 1 & X_{22} & X_{32} & \cdots & X_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & X_{2n} & X_{3n} & \cdots & X_{kn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

$$Y \quad = \qquad\qquad X \qquad\qquad \beta \quad + \quad \varepsilon$$

حيث: Y : شعاع مشاهدات المتغير التابع $(n \times 1)$.

X : مصفوفة مشاهدات المتغيرات المستقلة $(n \times k)$.

β: شعاع المعلمات $(k \times 1)$.

ε: شعاع المتغير العشوائي $(n \times 1)$.

2- الفرضيات الاحتمالية التي يقوم عليها النموذج الخطي المتعدد:

-1 $$E(\varepsilon) = 0 = \begin{pmatrix} E(\varepsilon_1) \\ E(\varepsilon_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ E(\varepsilon_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

-2 $$\Omega_\varepsilon = E(\varepsilon\varepsilon') = \delta_\varepsilon^2 I_n$$

-3 $$\mathrm{Cov}(X.\varepsilon) = 0$$

-4 $\left(\frac{X'X}{n}\right)$: تؤول إلى مصفوفة منتهية وغير أحادية.

-5 أشعة المصفوفة X مستقلة، هذا ما يسمح بالتخلص من مشكل التعدد الخطي (MULTICOLENEARITY) وحساب $(X'X)^{-1}$.

ثانيا: مقدرات معلمات النموذج الخطي المتعدد:

يتم تقدير النموذج الخطي المتعدد بطريقة المربعات الصغرى العادية، التي تهدف إلى الحصول على مقدرات $\hat{\beta}_1 . \hat{\beta}_2 \cdots\cdots \hat{\beta}_k$ تعطي مجموع مربعات انحراف القيم المقدرة عن القيم الحقيقية في أدنى قيمة له.

ليكن النموذج: $Y = X\beta + \varepsilon$ ، وتحت فرضيات طريقة المربعات الصغرى العادية نجد:

- النموذج المقدر: $\hat{Y} = X\hat{\beta}$.
- انحراف القيم المقدرة عن القيم الحقيقية: $e = Y - \hat{Y} = Y - X\hat{\beta}$.
- مجموع مربعات البواقي: $e'e = (Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta})$.

وكما هو معلوم أن طريقة المربعات الصغرى العادية تهدف إلى جعل $e'e$ في أدنى قيمة لها، أي إيجاد $\mathrm{Min}\ e'e$ ، فنقوم بحساب المشتقات الجزئية لـ: $e'e$ بالنسبة إلى $\hat{\beta}_1 . \hat{\beta}_2$ L L $\hat{\beta}_k$ ، ونجعلها مساوية للصفر.

لدينا: $e'e = (Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta}) = Y'Y - Y'X\hat{\beta} - \hat{\beta}X'Y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}$.

ولدينا القيمتين: $Y'X\hat{\beta}$ و $\hat{\beta}'X'Y$ متساويتين فنجد: $e'e = Y'Y - 2\hat{\beta}X'Y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}$.

نقوم بإيجاد: $\frac{\partial e'e}{\partial \hat{\beta}} = 0$.

$$\frac{de'e}{d\hat{\beta}} = -2X'Y + 2X'X\hat{\beta} = 0$$

$$= -X'Y + X'X\hat{\beta} = 0$$

ومنه: $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$

ملاحظة: $X'Y - X'X\hat{\beta} = 0 \Rightarrow X'(Y - X\hat{\beta}) = X'e = 0$ ، ومنه فإن: X و e متعامدة.

$$e = (Y - X\hat{\beta}) = Y - X(X'X)^{-1}X'Y = (I - X(X'X)^{-1}X')Y = MY$$

حيث: M مصفوفة متناظرة ومستقلة، أي: $M = M^2 = M^3 = \cdots\cdots$ و $MX = 0$.

فمن النموذج الذي يأخذ شكل مصفوفات نجد أن الشعاع المقدر $\hat{\beta}$ يكون كما يلي:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

$$(X'X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{k1} & X_{k2} & \cdots & X_{kn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & X_{21} & \cdots & X_{k1} \\ 1 & X_{22} & \cdots & X_{k2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{2n} & \cdots & X_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum X_{2t} & \cdots & \sum X_{kt} \\ \sum X_{2t} & \sum X_{2t}^2 & \cdots & \sum X_{2t}X_{kt} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum X_{kt} & \sum X_{2t}X_{kt} & \cdots & \sum X_{kt}^2 \end{pmatrix}$$

$$X'Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{k1} & X_{k2} & \cdots & X_{kn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum Y_t \\ \sum X_{2t}Y_t \\ \vdots \\ \sum X_{kt}Y_t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y = \begin{pmatrix} n & \sum X_{2t} & \cdots & \sum X_{kt} \\ \sum X_{2t} & \sum X_{2t}^2 & \cdots & \sum X_{2t}X_{kt} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum X_{kt} & \sum X_{2t}X_{kt} & \cdots & \sum X_{kt}^2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \sum Y_t \\ \sum X_{2t}Y_t \\ \vdots \\ \sum X_{kt}Y_t \end{pmatrix}$$

مثال: لتكن لديك البيانات التالية:

t	Y_t	X_{2t}	X_{3t}
1	4	4	0.9
2	4.5	5	0.8
3	5	6	0.9
4	5.5	7	0.8
5	6	9	0.7
6	7	8	0.6
7	6.5	10	0.6
8	6.5	11	0.8
9	7.5	12	0.5
10	7.5	13	0.5
$\sum$	**60**	**85**	**7.1**

المطلوب:

قدر النموذج التالي $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \varepsilon_t$ بطريقة OLS. ثم استنتج القيم المقدرة وبواقي التقدير.

لدينا:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & X_{21} & X_{31} \\ 1 & X_{22} & X_{32} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{210} & X_{310} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_{10} \end{pmatrix}$$

$$Y_{(10\times1)} = \quad X_{(10\times3)} \quad \beta_{(3\times1)} + \varepsilon_{(10\times1)}$$

وبالتالي نجد:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y = \begin{pmatrix} 10 & \sum X_{2t} & \sum X_{3t} \\ \sum X_{2t} & \sum X_{2t}^2 & \sum X_{2t}X_{3t} \\ \sum X_{3t} & \sum X_{2t}X_{3t} & \sum X_{3t}^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum Y_t \\ \sum X_{2t}Y_t \\ \sum X_{kt}Y_t \end{pmatrix}$$

حيث:

$$(X'X)=\begin{pmatrix}10 & \sum X_{2t} & \sum X_{3t}\\ \sum X_{2t} & \sum X_{2t}^2 & \sum X_{2t}X_{3t}\\ \sum X_{3t} & \sum X_{2t}X_{3t} & \sum X_{3t}^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 85 & 7.1\\ 85 & 805 & 57\\ 7.1 & 57 & 5.25\end{pmatrix}$$

$$\text{Det}(X'X)=(-1)^{1+1}(10)\text{Det}\begin{pmatrix}805 & 57\\ 57 & 5.25\end{pmatrix}+(-1)^{1+2}(85)\text{Det}\begin{pmatrix}85 & 57\\ 7.1 & 5.25\end{pmatrix}+(-1)^{1+3}(7.1)\text{Det}\begin{pmatrix}85 & 805\\ 7.1 & 57\end{pmatrix}$$

$$=10[805\cdot 5.25-57\cdot 57]-85[85\cdot 5.25-57\cdot 7.1]+7.1[85\cdot 57-805\cdot 7.1]=60.2$$

$$\Rightarrow (X'X)^{-1}=\frac{1}{\text{Det}(X'X)}\text{Adj}(X'X)=\frac{1}{60.2}\begin{pmatrix}+977.25 & -41.55 & +(-870.5)\\ -41.55 & +2.09 & -(-33.5)\\ +(-870.5) & -(-33.5) & +825\end{pmatrix}'$$

$$=\begin{pmatrix}16.23 & -0.690 & -14.46\\ -0.690 & 0.034 & 0.556\\ -14.46 & 0.556 & 13.70\end{pmatrix}$$

$$X'Y=\begin{pmatrix}\sum Y_t\\ \sum X_{2t}Y_t\\ \sum X_{kt}Y_t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}60\\ 541\\ 41.1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{\beta}=(X'X)^{-1}X'Y=\begin{pmatrix}16.23 & -0.690 & -14.46\\ -0.690 & 0.034 & 0.556\\ -14.46 & 0.556 & 13.70\end{pmatrix}\begin{pmatrix}60\\ 541\\ 41.1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6.29\\ 0.24\\ -3.30\end{pmatrix}$$

ومنه يكون النموذج المقدر كما يلي:

$$\hat{Y}_t=6.29+0.24\cdot X_{2t}-3.30\cdot X_{3t}$$

أما القيم المقدرة $\hat{Y}$ وبواقي التقدير e فتكون كمايلي:

$$\hat{Y}_1=6.29+0.24\cdot(X_{21}=4)-3.30\cdot(X_{31}=0.9)=4.28\Rightarrow e_1=Y_1-\hat{Y}_1=4-4.28=-0.28$$

$$\hat{Y}_2=6.29+0.24\cdot(X_{22}=5)-3.30\cdot(X_{32}=0.8)=4.85\Rightarrow e_2=Y_2-\hat{Y}_2=4.5-4.85=-0.35$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\hat{Y}_{10}=6.29+0.24\cdot(X_{210}=13)-3.30\cdot(X_{310}=0.5)=7.78\Rightarrow e_{10}=Y_{10}-\hat{Y}_{10}=7.5-7.78=-0.28$$

وهو ما يوضحه الجدول التالي:

	$\hat{Y}$	e
	4.28	-0.2850
	4.85	-0.3571
	4.76	0.2318
	5.34	0.1598
	6.15	-0.1538
	6.24	0.7571
	6.72	-0.2259
	6.30	0.19369
	7.53	-0.03953
	7.78	-0.2810
$\sum$	**60**	**00**