Corrigé type d'examen Finale

07/11/2020

Exercice 1 :

I) Non ! En fait $\mathbb{R}^{n-1} \not\subset \mathbb{R}^n$.

Une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ est de la forme :

$$f((x_1, x_2, \ldots, x_n)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \quad ou\ \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n$$

et donc les hyperplans de $\mathbb{R}^n$ sont de la forme

$$\{X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = 0\}.$$

II) 1. Puisque $dim\,(\mathbb{R}_2[X])^* = Card\,\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} = 3$, il suffit donc de montrer que $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ est libre. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} & \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \alpha_3\varphi_3 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \alpha_3\varphi_3)(P) = 0,\ \forall P \in \mathbb{R}_2[X], \\ \Leftrightarrow\ & \alpha_1 P(0) + \alpha_2 P'(1) + \alpha_3 \int_0^1 tP(t)dt = 0,\ \forall P \in \mathbb{R}_2[X]. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{cases} Pour P(X) = 1 \\ Pour P(X) = X \\ Pour P(X) = X^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \frac{1}{3}\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_2 + \frac{1}{4}\alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Donc $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ est libre, alors forme une base de $(\mathbb{R}_2[X])^*$.

2. Soit $\mathcal{B} = \{P_1, P_2, P_3\}$ la base antéduale de $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$, avec

$$P_1(X) = a_1X^2 + b_1X + c_1, P_2(X) = a_2X^2 + b_2X + c_2, P_3(X) = a_3X^3 + b_3X + c_3.$$

On a

$$\varphi_i(P_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

pour $i, j = 1, 2, 3$. Donc

$$\begin{cases} \varphi_1(P_1) = 1 \\ \varphi_2(P_1) = 0 \\ \varphi_3(P_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ 2a_1 + b_1 = 0 \\ \frac{1}{4}a_1 + \frac{1}{3}b_1 + \frac{1}{2}c_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow a_1 = \frac{6}{5}, b_1 = -\frac{12}{5}\ et\ c_1 = 1.$$

$$\begin{cases}\varphi_1(P_2)=0\\ \varphi_2(P_2)=1\\ \varphi_3(P_2)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_2=0\\ 2a_2+b_2=1\\ \frac{1}{4}a_2+\frac{1}{3}b_2+\frac{1}{2}c_2=0\end{cases}\Rightarrow a_2=\frac{4}{5}, b_2=-\frac{3}{5}\ et\ c_2=0.$$

$$\begin{cases}\varphi_1(P_2)=0\\ \varphi_2(P_2)=0\\ \varphi_3(P_2)=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_3=0\\ 2a_3+b_3=0\\ \frac{1}{4}a_3+\frac{1}{3}b_3+\frac{1}{2}c_3=1\end{cases}\Rightarrow a_3=-\frac{12}{5}, b_3=\frac{24}{5}\ et\ c_3=0.$$

Alors $\mathcal{B}=\left\{\frac{6}{5}X^2-\frac{12}{5}X+1, \frac{4}{5}X^2-\frac{3}{5}X, -\frac{12}{5}X^2+\frac{24}{5}X\right\}$.

Exercice 2 :

I) 1. *Montrons que f_α est une forme bilinéaire symétriques :*

Soient $(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} f((y_1,y_2,y_3),(x_1,x_2,x_3)) &= y_1x_1+2y_2x_2+y_3x_3+\alpha y_1x_2+\alpha y_2x_1\\ &= x_1y_1+2x_2y_2+x_3y_3+\alpha x_1y_2+\alpha x_2y_1=f((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3))\end{aligned}$$

Donc f est symétrique.

Soient $(x_1,x_2,x_3),(x_1',x_2',x_3'),(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f((x_1,x_2,x_3)+\alpha(x_1',x_2',x_3'),(y_1,y_2,y_3)) &= f((x_1+\alpha x_1',x_2+\alpha x_2',x_3+\alpha x_3'),(y_1,y_2,y_3))\\ &= (x_1+\lambda x_1')y_1+2(x_2+\lambda x_2')y_2+(x_3+\alpha x_3')y_3\\ &+ \alpha(x_1+\lambda x_1')y_2+\alpha(x_2+\lambda x_2')y_1\\ &= x_1y_1+2x_2y_2+x_3y_3+\alpha x_1y_2+\alpha x_2y_1\\ &+ \lambda(x_1'y_1+2x_2'y_2+x_3'y_3+\alpha x_1'y_2+\alpha x_2'y_1)\\ &= f((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3))+\lambda f((x_1',x_2',x_3'),(y_1,y_2,y_3\end{aligned}$$

Donc f est bilinaire.

2. *Déterminons la forme quadratique associée a f_α :*

$$\begin{aligned} q_\alpha : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (x_1,x_2,x_3) &\longmapsto q_\alpha((x_1,x_2,x_3))\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} q_\alpha((x_1,x_2,x_3)) &= f((x_1,x_2,x_3),(x_1,x_2,x_3))\\ &= x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2\alpha x_1x_2.\end{aligned}$$

3. *Déterminons la matrice de f_α dans la base $\{\varepsilon_1=,\varepsilon_2,\varepsilon_3\}$:*

$$M_B(f_\alpha)=\begin{pmatrix} f_\alpha(\varepsilon_1,\varepsilon_1) & f_\alpha(\varepsilon_1,\varepsilon_2) & f_\alpha(\varepsilon_1,\varepsilon_3)\\ f_\alpha(\varepsilon_2,\varepsilon_1) & f_\alpha(\varepsilon_2,\varepsilon_2) & f_\alpha(\varepsilon_2,\varepsilon_3)\\ f_\alpha(\varepsilon_3,\varepsilon_1) & f_\alpha(\varepsilon_3,\varepsilon_2) & f_\alpha(\varepsilon_3,\varepsilon_3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \alpha & 1\\ \alpha & 2 & \alpha\\ 1 & \alpha & 2\end{pmatrix}$$

4. *Déterminons $rg(f_\alpha)$ le rang de f_α.*

$$detM(f_\alpha) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 2 & \alpha \\ 1 & \alpha & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 2 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - \alpha^2.$$

- Si $\alpha \neq \pm\sqrt{2}$ $rg(f_\alpha)$=3.
- Si $\alpha = \sqrt{2}$ $rg(f_\alpha)$<3
  Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ tel que
  $$\lambda_1(1, \sqrt{2}, 1) + \lambda_2(1, \sqrt{2}, 2) = (0, 0, 0)$$
  On obtient $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ donc $(1, \sqrt{2}, 1)$ et $(1, \sqrt{2}, 2)$ sont librs par conséquent $rg(f_\alpha)$=2.
- Si $\alpha = -\sqrt{2}$ $rg(f_\alpha)$<3
  Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ tel que
  $$\lambda_1(1, -\sqrt{2}, 1) + \lambda_2(1, -\sqrt{2}, 2) = (0, 0, 0)$$
  On obtient $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ donc $(1, -\sqrt{2}, 1)$ et $(1, -\sqrt{2}, 2)$ sont librs par conséquent $rg(f_\alpha)$=2.

5. *Déterminons les valeurs de α pour les quelles q_α est non dégénérée :*

f_α est non dégénérée $\Leftrightarrow detM(f_\alpha) \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{R} - \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.

II)

$$\begin{aligned} Soit\ x \in (A \cup B)^\perp &\Leftrightarrow f(x, y) = 0, \quad \forall y \in A \cup B \\ &\Leftrightarrow f(x, y) = 0, \quad \forall y \in A \wedge \forall y \in B \\ &\Leftrightarrow f(x, y) = 0, \quad \forall y \in A \wedge f(x, y) = 0, \quad \forall y \in B \\ &\Leftrightarrow x \in A^\perp \wedge x \in B^\perp \\ &\Leftrightarrow x \in A^\perp \cap B^\perp. \end{aligned}$$

Donc
$$(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp.$$